**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ШОСТКИНСЬКИЙ ІНСТИТУТ Сум ДУ**

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## Лекції, практичні, розв’язання прикладів, завдання для самостійної роботи

## для студентів всіх спеціальностей освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» денної та заочної форм навчання

**У шести частинах**

**Частина 3**

# З М І С Т

# ВСТУП

Основна форма навчання студентів – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичних положень за підручником, розгляду прикладів і розв’язання задач. При вивченні матеріалу за підручником треба переходити до наступного питання тільки після правильного зрозуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення, навіть і ті, які пропущені у підручнику. Розв’язання задач при вивченні дисципліни «Вища математика» часто пов’язано з багатьма складностями. Якщо складається скрутне становище при розв’язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, привести припущення відносно плану розв’язку.

Відомо, що при самостійному розв’язуванні задач студентам потрібні постійні консультації щодо способів їх розв’язування, оскільки знайти шлях до розв’язування задачі без допомоги викладача або відповідного підручника студентові не під силу. Допомогти студентам технічних спеціальностей всіх форм навчання подолати ці складності, навчити їх застосовувати теоретичні знання до розв’язування задач - основне призначення цього навчального посібника.

У третій частині навчального посібника викладено матеріал з таких розділів вищої математики: «Визначений інтеграл», «Невласні інтеграли» та «Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії». Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв’язанням великої кількості задач різного ступеня складності з їх повним аналізом. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи.

Автори сподіваються, що саме така побудова посібника надає студентові широкі можливості до активної самостійної роботи, яка, безумовно, сприятиме засвоєнню матеріалу при вивченні дисципліни «Вища математика».

## Розділ 1
## ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

### 1.1. Означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми. Умови існування та властивості визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a < b$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на $n$ довільних частин так, щоб

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ назвемо $T$-розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 0,1,..., n-1)$ та значення функції $f(\xi_i)$ у довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Позначимо через $\lambda$ - найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$. Утворимо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, яка називається ***інтегральною сумою*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

***<u>Означення 1.</u>*** Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\sigma_n$ при умові, що найбільша із різниць $\Delta x_i$ прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки, ані від вибору проміжних точок $\xi_i$ у кожному з частинних відрізків, то вона називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Числа $a$ і $b$ називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією; $f(x)dx$ -

підінтегральним виразом; $x$ - змінною інтегрування, а відрізок $[a;b]$ - проміжком інтегрування.

***<u>Означення 2.</u>*** Функція $f(x)$, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл, називається ***інтегровною*** на цьому відрізку.

***Геометричний зміст визначеного інтеграла*** полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної та інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ та віссю $ox$:

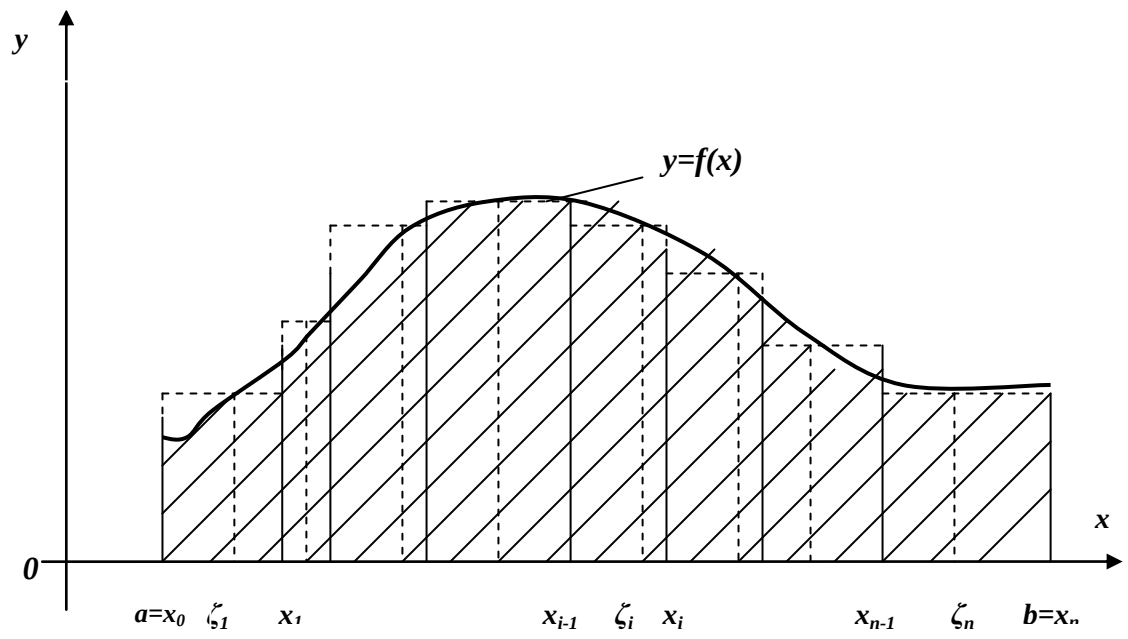



**Рис.1.1**

***Необхідною умовою існування визначеного інтеграла*** є обмеженість функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

***Достатньою умовою існування визначеного інтеграла*** є неперервність функції $f(x)$ на цьому ж відрізку.

Розглянемо деякі властивості визначеного інтеграла:

1) Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3) Для будь-якого довільного сталого числа $C$ справджується рівність:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

4) При переставленні меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ - інтегровні на відрізку $[a;b]$, то функція $f(x) \pm g(x)$ також є інтегровною на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

6) Якщо функція $f(x)$ - інтегровна на найбільшому з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то вона інтегровна і в двох інших і для будь-якого взаємного розташування точок $a,b,c$ має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7) Якщо функція $f(x)$ - інтегровна на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$ і всюди на цьому відрізку $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Аналогічно маємо, що $\int_a^b f(x)dx \le 0$, якщо $f(x) \le 0$.

8) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ - інтегровні на $[a;b]$ $(a < b)$ і всюди на цьому відрізку $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

9) Якщо функція $f(x)$ - інтегровна на $[a;b]$ $(a < b)$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна на цьому відрізку, причому

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

10) Якщо функція $f(x)$ - інтегровна на $[a;b]$ $(a < b)$ та $m$ і $M$ - відповідно її найменше і найбільше значення на цьому відрізку, то справджуються нерівності

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

11) Якщо функція $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Це ствердження має назву ***теореми про середнє значення визначеного інтеграла.***

## 1.2. Обчислення визначених інтегралів

### 1.2.1 Формула Ньютона-Лейбніца

Для пошуку способу обчислення визначеного інтеграла встановимо зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами. Для цього розглянемо

$\int_a^x f(t)dt$, де функція $f(x)$ є неперервною на $[a;x]$ та інтегровною на ньому, $x$ - довільна фіксовна точка відрізка $[a;b]$.

Цей інтеграл називають ***визначеним інтегралом із змінною верхньою межею.*** Очевидно, він є функцією від $x$, тому позначимо його через $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Має місце наступна ***теорема Барроу***:

Якщо функція $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, то функція $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ - диференційовна на цьому відрізку, причому $\phi'(x)=f(x)$ для усіх $x\in[a;b]$.

Тобто для всякої неперервної на $[a;b]$ функції завжди існує первісна, та однією з цих первісних є визначений інтеграл із змінною верхнею межею. Таким чином, встановлений зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами.

Ефективний і простий спосіб обчислення визначеного інтеграла дається ***формулою Ньютона-Лейбніца***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

де $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, $F(x)$ - яка-небудь її первісна.

### *Зразки розв'язування задач*

**Обчислити інтеграли.**

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Первісною від даної підінтегральної функції є $F(x)=ln|1+x|$. Обчислимо її значення при верхній границі $F(1)=ln|1+1|=ln2$, при нижній

границі $F(0)=ln|1+0|=ln1=0$. За формулою Ньютона-Лейбніца значення інтегралу становить $I=F(1)-F(0)=ln2-0=ln2$.

Розв'язування може бути подане у вигляді:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=ln|1+x|\Big|_0^1=ln|1+1|-ln|1+0|=ln2-ln1=ln2-0=ln2.$$

2. $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}=arctg\sqrt{3}-arctg0=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}.$$

3. $$\int_2^3 \left(1+2x+3x^2\right)dx=\left(x+2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^3=\left(x+x^2+x^3\right)\Big|_2^3=\left(3+3^2+3^3\right)-$$
$$-\left(2+2^2+2^3\right)=(3+9+27)-(2+4+8)=39-14=25.$$

4. $$\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx=\int_1^8 \frac{2+5x^{\frac{1}{3}}}{x^3}dx=\int_1^8\left(2x^{-3}+5x^{-8/3}\right)dx=\left(2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+5\cdot\frac{x^{-5/3}}{-5/3}\right)\Big|_1^8$$
$$=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\Big|_1^8=\left(-\frac{1}{64}-\frac{3}{\sqrt[8]{8^5}}\right)-(-1-3)=-\frac{1}{64}-\frac{3}{32}+4=-\frac{7}{64}+4=3\frac{57}{64}.$$

5. $$\int_2^{13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}=\int_2^{13}(3-x)^{-\frac{4}{5}}=-\frac{(3-x)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Big|_2^{13}=-5\sqrt[5]{3-x}\Big|_2^{13}=-5\left(\sqrt[5]{3-13}-\sqrt[5]{3-2}\right)=$$
$$=-5\left(-\sqrt[5]{10}-1\right)=5\sqrt[5]{10}+5.$$

6. $$\int_0^{\pi/2} cos^2 xdx.$$

Первісну можна знайти, використавши формулу пониження степеня: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Отримаємо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

7. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Для знаходження первісної в знаменнику виділимо повний квадрат.

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+1+9} = \int_2^5 \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Bigg|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[arctg\frac{5+1}{3} - arctg\frac{2+1}{3}\right] = \frac{1}{3}(arctg2 - arctg1) = \frac{1}{3}\left(arctg2 - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}arctg2 - \frac{\pi}{12}.$$

8. $\int_{-2}^{-1} \frac{(x+1)dx}{x^3-x^2}$.

Знайдемо первісну функції. Для цього правильний дріб $\frac{x+1}{x^3-x^2}$ представимо у вигляді суми найпростіших дробів, а саме

$$\frac{x+1}{x^3-x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}.$$

Звільнившись від знаменника, маємо:

$$x+1=A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2.$$

$$\begin{array}{r} \textit{При } x=0: \\ \textit{при } x=1: \\ \textit{при } x^2: \end{array} \begin{cases} 1=-A \quad \Rightarrow \quad A=-1, \\ 2=C \quad \Rightarrow \quad C=2, \\ 0=B+C \quad \Rightarrow \quad B=-2. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{x+1}{x^3-x^2}=\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x-1}$.

Тоді $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{(x+1)dx}{x^3-x^2}=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\left(\frac{1}{x}-2ln|x|+2ln|x-1|\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=$

$$=\left[\frac{1}{2}+ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right]\Bigg|_{-2}^{-1}=\left[-\frac{1}{1}+ln\left(\frac{-1-1}{-1}\right)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}+ln\left(\frac{-2-2}{-2}\right)^2\right]=$$

$$=(-1+ln4)-\left(-\frac{1}{2}+ln\frac{9}{4}\right)=-1+ln4+\frac{1}{2}-ln\frac{9}{4}=-\frac{1}{2}+ln\frac{4}{9/4}=-\frac{1}{2}+ln\frac{16}{9}.$$

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

2. $\displaystyle\int_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

3. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^2}$;

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}sin^2 xdx$;

5. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

6. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$;

### 1.2.2 Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Нехай треба обчислити інтеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$. Якщо виконуються умови:

1) функція $\varphi(t)$ неперервна разом із своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[a;b]$;
2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
3) при змінюванні $t$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ значення функції $x=\varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a;b]$, то справедлива ***формула заміни змінної*** (або підстановки) у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$\left(\alpha=\varphi^{-1}(a),\beta=\varphi^{-1}(b)\right).$$

Треба відзначити, що іноді набагато зручніше замість підстановки $x=\varphi(t)$ використовувати так звану «обернену» підстановку $t=\psi(x)$, де функція $\psi(x)$ є строго монотонною і неперервно диференційовною на відрізку $[a;b]$, а множиною її значень є відрізок $[\alpha;\beta]$. Тоді для неї існує обернена функція $x=\psi^{-1}(t)$ , яка задовольняє переліченим вище умовам. Отже, в цьому випадку маємо:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\psi^{-1}(t)\right)\cdot\left(\psi^{-1}(t)\right)'dt \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$(\alpha=\psi(a),\beta=\psi(b)).$$

Звернемо увагу на те, що на відміну від заміни змінної у невизначеному інтегралі, заміна змінної у визначеному інтегралі не потребує повернення до початкової змінної. Треба лише змінити межі інтегрування за формулами (1.1) або (1.2).

*Зразки розв'язування задач*

**Обчислити інтеграли.**

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2}$.

Зробимо заміну $x^2 = t$. Тоді $2xdx = dt$, $xdx = \frac{1}{2}dt$.

Визначимо нові межі інтегрування. Якщо $x = 0$, то $t = 0^2 = 0$, при $x = 1$ $t = 1^2 = 1$.

Отримаємо:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(arctg1 - arctg0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

2. $$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} \cos x = t, & \text{при} \quad x = 0 \quad t = 1 \\ -\sin x dx = dt, & \text{при} \quad x = \pi/2 \quad t = 0 \\ \sin x dx = -dt, & \end{array} \right| = -\int_1^0 t^2 dt.$$

Використаємо властивість 4 і змінюємо межі інтегрування:

$$-\int_1^0 t^2 dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

3. $$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{ll} 1+\ln x = t, & \text{при} \quad x = 1 \quad t = 1 \\ dx/x = dt, & \text{при} \quad x = e \quad t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(2^2 - 1^2\right) = \frac{3}{2}.$$

4. $$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left| \begin{array}{ll} 1/x = t, & \text{при} \quad x = 1 \quad t = 1 \\ dx/x^2 = -dt, & \text{при} \quad x = 2 \quad t = 1/2 \end{array} \right| = -\int_1^{1/2} e^t dt = \int_{1/2}^1 e^t dt = e^1 - e^{1/2} = e - \sqrt{e}.$$

5. $$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1+5tgx}{cos^2\,x}dx=\left|\begin{array}{lll} 1+5tgx=t, & \text{при} & x=\pi/6 \quad t=\dfrac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{5dx}{1+t^2}=dt, & \text{при} & x=\pi/4 \quad t=6 \\ \dfrac{dx}{1+t^2}=\dfrac{1}{5}dt, & & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\int_{\frac{\sqrt{3+5}}{\sqrt{3}}}^{6}tdt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}}}^{6}=\frac{1}{10}\left[36-\left(\frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=\frac{1}{10}\left(36-\frac{3+10\sqrt{3}+25}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left(36-\frac{28+10\sqrt{3}}{30}\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{108-28+10\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{80+10\sqrt{3}}{3}=\frac{8+\sqrt{3}}{3}.$$

6. $$\int_{1}^{5}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{lll} x-1=t^2, t=\sqrt{x-1}, & \text{при} & x=1 \quad t=0 \\ x=t^2+1, & & \\ dx=2tdt, & \text{при} & x=5 \quad t=2 \end{array}\right|=\int_{0}^{2}\frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1}=2\int_{0}^{2}\frac{t^2dt}{t^2+1}=$$

$$=2\int_{0}^{2}\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=2\int_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-arctgt\right)\Big|_{0}^{2}=2\left[\left(2-arctg2\right)-\right.$$

$$\left.-\left(0-arctg0\right)\right]=4-2arctg2.$$

7. $$\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+2sin^2\,x}.$$

Оскільки підінтегральна функція є раціональною відносно $sin^2\,x$, зробимо заміну $tgx=t$.

Тоді $$\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+2sin^2\,x}=\left|\begin{array}{lll} tgx=t, & & \\ x=arctgt, & \text{при} & x=0 \quad t=0 \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}, & & \\ sin^2\,x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, & \text{при} & x=\pi/4 \quad t=1 \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{2t^2}{1+t^2}\right)}=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+2t^2}=\int_0^1 \frac{dt}{3t^2+1}=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}arctg\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\sqrt{3}t\Bigg|_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\sqrt{3}-arctg0\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

8. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{cos^3 xdx}{\sqrt[3]{sin\,x}}$.

Перетворимо вираз $cos^3 x$: $cos^3 x=cos^2 x\cdot cos\,x=\left(1-sin^2 x\right)cos\,x$.

Інтеграл набуває вигляду:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{cos^3 dx}{\sqrt[3]{sin\,x}}=\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{\left(1-sin^2 x\right)cos\,xdx}{\sqrt[3]{sin\,x}}=\left|\begin{array}{lll} sin\,x=t, & \text{при} & x=-\pi/2 \quad t=-1 \\ cos\,xdx=dt, & \text{при} & x=-\pi/4 \quad t=-1/\sqrt{2} \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{-1}^{-1/\sqrt{2}}\frac{\left(1-t^2\right)dt}{\sqrt[3]{t}}=\int\limits_{-1}^{-1/\sqrt{2}}\frac{1-t^2}{t^{1/3}}dt=\int\limits_{-1}^{-1/\sqrt{2}}\left(t^{-1/3}-t^{5/3}\right)dt=\left(\frac{t^{2/3}}{2/3}-\frac{t^{8/3}}{8/3}\right)\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{t^8}\right)\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\sqrt[3]{(-1)^2}\right)-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8}-\sqrt[3]{(-1)^8}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1\right)-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2\sqrt[2]{2}}+\frac{3}{8}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{16}\right)-\frac{9}{8}=.$$

$$=\frac{21}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{9}{8}.$$

9. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

Підінтегральний вираз містить $\sqrt{x^2-1}$. Зробимо заміну $x=\frac{1}{cost}$, $dx=\frac{sintdt}{cos^2 t}$. Тоді $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{cos^2 t}-1}=\sqrt{tg^2 t}=tgt$. Щоб знайти нові межі інтегрування, виразимо $t$ через $x$: $t=arccos\frac{1}{x}$.

Отже, при $x=\sqrt{2}$ $\quad t=arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$,

при $x=2$ $\quad t=arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Будемо мати: $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{sintdt}{\frac{1}{cos^5 t}\cdot tgt\cdot cos^2 t}=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}cos^4 tdt$.

Щоб проінтегрувати парну степінь $cost$, скористуємось двічі формулою пониження степеня:

$$cos^4 t=\left(cos^2 t\right)^2=\left(\frac{1+cos2t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2cos2t+cos^2 2t\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2cos2t+\frac{1+cos4t}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+2cos2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos4t\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2cos2t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}cos4t\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}cos2t+\frac{1}{8}cos4t.$$

Тобто

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}cos^4 tdt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}cos2t+\frac{1}{8}cos4t\right)dt=\left(\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}sin2t+\frac{1}{32}sin4t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}=$$

$$=\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{32}sin\frac{4\pi}{3}\right)-\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{32}sin\pi\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+$$

$$+\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}=\frac{4\pi}{32}-\frac{3\pi}{32}+\frac{8\sqrt{3}}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{32}+\frac{7\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{4}=\frac{2\pi+7\sqrt{3}-16}{64}.$$

10. $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Застосуємо для інтегрування тригонометричну підстановку $x = sint$. Тоді $dx = costdt$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sin^2 t} = \sqrt{cos^2 t} = cost$.

Межі інтегрування: $t = arcsin x$, тому при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad t = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$,

при $x = 1$ $\quad t = arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{cost \cdot costdt}{sin^2 t} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^2 tdt.$$

Отриманий інтеграл не є табличним. Для його обчислення необхідно скористатися ще однією заміною.

Позначимо $ctgt = z$, звідки $t = arcctgz$, $\quad dt = -\frac{dz}{1+z^2}$.

При $t = \frac{\pi}{4}$ $\quad z = ctg\frac{\pi}{4} = 1$, при $t = \frac{\pi}{2}$ $\quad z = ctg\frac{\pi}{2} = 0$.

Тоді $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^2 tdt = -\int\limits_{1}^{0} \frac{z^2 dz}{1+z^2} = \int\limits_{0}^{1} \frac{(1+z^2)-1}{1+z^2}dz = \int\limits_{0}^{1}\left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$

$$= (z - arctgz)\Big|_0^1 = (1 - arctg1) - (0 - arctg0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

3. $\int\limits_{-\pi}^{3\pi/2} \sin^3 x dx$;

4. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$;

6. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

7. $\int\limits_{0}^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

### 1.2.3 Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ - неперервно диференційовні на відрізку $[a;b]$, то справедлива формула:

$$\int\limits_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} vdu$$

Схема використання цієї формули співпадає із обчисленням невизначених інтегралів цим методом.

*Зразки розв'язування задач*

**Обчислити інтеграли.**

1. $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx$.

Покладемо $u = x$, $dv = \cos x dx$; тоді $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$. Отримаємо:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = (x \cdot \sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = (\pi \cdot \sin\pi - 0) + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 =$$

$$= -1 - 1 = -2.$$

2. $$\int_0^3 x\,arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = x^2/2 \end{matrix} \right| = \left( arctgx \cdot \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \left( arctg3 \cdot \frac{9}{2} - arctg0 \cdot 0 \right) - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \frac{9}{2} arctg3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{9}{2} arctg3 - \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^3 = \frac{9}{2} arctg3 - \frac{1}{2}[(3 - arctg3) - 0] = \frac{9}{2} arctg3 - \frac{3}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} arctg3 = 5 arctg3 - \frac{3}{2}.$$

3. $$\int_0^{e-1} ln(x+1) dx = \left| \begin{matrix} u = ln(x+1), & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = (x\,ln(x+1))\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= ((e-1)ln(e-1+1) - 0) - \int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = e - 1 - \int_0^{e-1} \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= e - 1 - (x - ln(x+1))\Big|_0^{e-1} = e - 1 - [(e - 1 - ln(e-1+1)) - (0 - ln(0+1))] =$$

$$= e - 1 - [e - 1 - 1] = e - 1 - e + 2 = 1.$$

4. $$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{cos^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{cos^2 x}, v = tgx \end{matrix} \right| = (x \cdot tgx)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \int_{\pi/6}^{\pi/3} tgx dx =$$

$$=\left(\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{6}\right)+ln|cos\,x|\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=\left(\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(lncos\frac{\pi}{3}-lncos\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}+ln\frac{1}{2}-ln\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}+ln\left(\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}+ln\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. $$\int_0^{\pi/2}e^x\,cos\,xdx=\begin{vmatrix}u=e^x, & du=e^xdx\\ dv=cos\,xdx, & v=sin\,x\end{vmatrix}=\left(e^x\,sin\,x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}e^x\,sin\,xdx.$$

Для обчислення отриманого інтегралу використаємо метод інтегрування частинами ще раз.

$$\left(e^x\,sin\,x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}e^x\,sin\,xdx=\begin{vmatrix}u=e^x, & du=e^xdx\\ dv=sin\,xdx, & v=-cos\,x\end{vmatrix}=\left(e^{\pi/2}\,sin\frac{\pi}{2}-e^0\cdot sin0\right)-$$

$$-\left[-e^x\,cos\,x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}e^x\,cos\,xdx\right]=\left(e^{\pi/2}+e^{\pi/2}\,cos\frac{\pi}{2}-e^0\,cos0\right)-\int_0^{\pi/2}e^x\,cos\,xdx=$$

$$=e^{\pi/2}-1-\int_0^{\pi/2}e^x\,cos\,xdx.$$

Після двократного інтегрування частинами ми прийшли до вихідного інтегралу. Позначимо $\int_0^{\pi/2}e^x\,cos\,xdx=I$. Тоді

$$I=e^{\pi/2}-1-I\text{, звідки }\ 2I=e^{\pi/2}-1,\ I=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-1\right).$$

Таким чином отримали:

$$\int_0^{\pi/2}e^x\,cos\,xdx=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-1\right).$$

6. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = e^{-x/2}dx, & v = -2e^{-x/2} \end{matrix} \right| = \left( -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} \right) \Big|_{-1}^{1} + 4\int\limits_{-1}^{1} xe^{-x/2} dx.$

Перший доданок можна обчислювати, а до другого знову застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\left( -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} \right) \Big|_{-1}^{1} + 4\int\limits_{-1}^{1} xe^{-x/2} dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x/2}dx, & v = -2e^{-x/2} \end{matrix} \right| = \left( -2e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+4\left[ \left( -2xe^{-\frac{x}{2}} \right) \Big|_{-1}^{1} + 2\int\limits_{-1}^{1} e^{-x/2} dx \right] = \left( -\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} \right) + 4\left[ \left( -2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}} \right) - \left( 4e^{-\frac{x}{2}} \right) \Big|_{-1}^{1} \right] =$$

$$= \left( -\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} \right) - \left( \frac{8}{\sqrt{e}} + 8\sqrt{e} \right) - 16\left( e^{-\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} - \frac{8}{\sqrt{e}} - 8\sqrt{e} - \frac{16}{\sqrt{e}} +$$

$$+16\sqrt{e} = 10\sqrt{e} - \frac{26}{\sqrt{e}}.$$

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x} dx;$

2. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx;$

3. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$

4. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x};$

5. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 3^x dx.$

## Розділ 2
## НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

### 2.1. Невласні інтеграли першого роду (з нескінченими межами)

Як відомо, ми розглядали визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a;b]$. Проте у ряді задач стає потреба розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a;\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$. Безпосередньо поширити поняття визначеного інтеграла на ці випадки не можна. Тому введемо нові означення. Отже, нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[a;B]$ де $B > a$. Тоді існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, який є функцією своєї верхньої межі.

***<u>Означення 1.</u>*** ***Невласним інтегралом першого роду*** функції $f(x)$ ***на проміжку*** $[a;+\infty)$ називають границю $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$ і записують

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx. \qquad \textbf{(2.1)}$$

У цьому випадку інтеграл називають ***збіжним*** (якщо границя скінченна) і ***розбіжним*** (якщо границя не існує або нескінченна), а підінтегральну функцію – інтегровною на проміжку $[a;+\infty)$.

Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;b]$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[A;b]$, де $A < b$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є функцією своєї нижньої межі.

***<u>Означення 2.</u>*** ***Невласним інтегралом першого роду*** функції $f(x)$ ***на проміжку*** $(-\infty;b]$ називають границю $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx$ і записують

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx. \qquad \textbf{(2.2)}$$

***Збіжність (розбіжність)*** цього інтеграла й інтегровність функції $f(x)$ на відповідному проміжку визначають так само, як і для інтеграла (2.1).

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ і неперервна на будь-якому відрізку $[a;b]$, то можна означити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int_{C}^{+\infty} f(x)dx, \qquad \textbf{(2.3)}$$

де $C$ - довільне дійсне число.

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{C} f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_{C}^{B} f(x)dx \qquad \textbf{(2.4)}$$

називається також ***невласним інтегралом першого роду*** функції $f(x)$ на ***проміжку*** $(-\infty;+\infty)$.

При цьому, якщо обидва інтеграли в правій частині рівності (2.3) збігаються, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають ***збіжним***. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (2.3) розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають ***розбіжним***.

Варто відзначити, що іноді питання про збіжність (розбіжність) невласного інтеграла можна вирішити не обчислюючи його. При цьому користуються так званими ознаками збіжності невласних інтегралів. Розглянемо їх детальніше.

### Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

*1. Ознака порівняння.*

Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ - неперервні і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

*2. Гранична ознака порівняння.*

Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, $(f(x) > 0, g(x) > 0)$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

***Наслідки .*** а) Якщо $k = 0$, то із збіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

б) Якщо $k = +\infty$, то із розбіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причому в цьому випадку він називається ***абсолютно збіжним.***

***Зауваження.*** Найчастіше при дослідженні інтегралів першого роду для порівняння використовують функції $\frac{1}{x^\alpha}$, оскільки відомо, що інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $0 < \alpha \le 1$.

*Зразки розв'язування задач*

**Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.**

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Згідно з формулою (2.1) матимемо:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} ln|x| \Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty} \left(ln|B| - ln1\right) = \lim_{B\to+\infty} ln|B| = +\infty .$$

Границя, нескінченна, отже інтеграл розбігається.

2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1} dx$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1} dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} e^{-4x+1} dx = -\frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} e^{-4x+1} \Big|_{0}^{B} = -\frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} \left(e^{-4B+1} - e^{1}\right) =$$

$= -\frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} e^{-4B+1} + \frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} e = -\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot e = \frac{e}{4}$. Границя скінченна, заданий інтеграл збігається.

3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} arctgx \Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty} \left(arctgB - arctg1\right) =$$

$= \lim_{B\to+\infty} arctgB - \lim_{B\to+\infty} arctg1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Границя скінченна, інтеграл збігається.

4. $\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2}$.

Згідно з формулою (2.2) будемо мати:

$$\int_{-\infty}^{-5}\frac{dx}{(3x-1)^2}=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{-5}\frac{dx}{(3x-1)^2}=-\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{(3x-1)}\Bigg|_{A}^{-5}=-\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{(3\cdot(-5)-1)}+$$

$$+\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{3A-1}=\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{3A-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{13}\cdot 0=\frac{1}{48}.$$

Границя скінченна, інтеграл збігається.

5. $\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+3}$.

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+3}=\lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\frac{xdx}{x^2+3}=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}ln\left|x^2+3\right|\Bigg|_{0}^{B}=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(ln\left|B^2+3\right|-ln3\right)=$$

$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}ln\left(B^2+3\right)-\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}ln3=\infty$. Границя нескінченна, отже інтеграл розбігається.

6. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}$.

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}=\lim_{B\to+\infty}\int_{e}^{B}\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}.$$

Як бачимо, визначений інтеграл не є табличним, тому обчислимо його окремо, розглядаючи як невизначений.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}=\left|\begin{matrix}t=ln\,x\\ dt=dx/x\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ln\,x}+C.$$

Повертаємось до границі:

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{e}^{B}\frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}=2\lim_{B\to+\infty}\sqrt{ln\,x}\Bigg|_{e}^{B}=2\lim_{B\to+\infty}\left(\sqrt{ln\,B}-\sqrt{ln\,e}\right)=2\lim_{B\to+\infty}\sqrt{ln\,B}-$$

$$-2\sqrt{ln\,e}=2\lim_{B\to+\infty}\sqrt{ln\,B}-2\cdot 1=\infty.$$

Границя нескінченна, тому інтеграл розбігається.

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17}$.

Згідно з формулою (2.3) розіб'ємо наш невласний інтеграл на суму двох невласних інтегралів, а саме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+17} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+17} +$$

$$+ \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{x^2+2x+17}.$$

Обчислимо окремо невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot 1+1\right)-1+17} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+16} = \frac{1}{4}\cdot arctg\frac{x+1}{4} + C.$$

Повертаємось до границь:

$$\frac{1}{4}\lim_{A\to-\infty} arctg\frac{x+1}{4}\Bigg|_{A}^{0} + \frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} arctg\frac{x+1}{4}\Bigg|_{0}^{B} = \frac{1}{4}\lim_{A\to-\infty}\left(arctg\frac{1}{4} - arctg\frac{A+1}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(arctg\frac{B+1}{4} - arctg\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(arctg\frac{1}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Границя скінченна, наш інтеграл збігається.

***Зауваження.*** При обчисленні границь слід мати на увазі, що $arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}, arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

8. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$.

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{2}^{B} \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Обчислимо невизначений інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}.$$

Це інтеграл від правильного раціонального дробу, тому, по-перше, розкладемо дріб на суму простих дробів.

Будемо мати: $\dfrac{1}{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}=$

$$=\frac{A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}.$$

З рівняння тотожних многочленів чисельників лівого та правого дробу отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $A,B,C,D$.

Отже, $1=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2$.

$$\begin{array}{r} \textit{При } x=1: \\ \textit{при } x=-1: \\ \textit{при } x^3: \\ \textit{при } x^2: \end{array}\begin{cases} 1=4B \quad\Rightarrow\quad B=1/4, \\ 1=4D \quad\Rightarrow\quad D=1/4, \\ 0=A+C, \\ 0=A+B-C+D. \end{cases}$$

Розглядаючи два останніх рівняння та підставляючи в них значення коефіцієнтів $B,D$, отримаємо:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A-C=-\dfrac{1}{2} \end{cases},\ \text{звідки}\ 2A=-\frac{1}{2},\quad A=-\frac{1}{4},\ \text{тоді}\ C=-A=\frac{1}{4}.$$

Отже, усі коефіцієнти знайдені і наш інтеграл зведеться до суми наступних інтегралів:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4}ln|x+1|-\frac{1}{4(x+1)}+C=\frac{1}{4}ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+C.$$

Повертаючись до границі, будемо мати:

$$\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_2^B=\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left[\left(ln\left|\frac{B+1}{B-1}\right|-\frac{1}{B-1}-\frac{1}{B+1}\right)-\right.$$

$$-\left(ln3-1-\frac{1}{2}\right)\Bigg]=\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}ln\left|\frac{B+1}{B-1}\right|-\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{B-1}-\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{B+1}-\lim_{B\to+\infty}\left(ln3-\frac{3}{2}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-ln3\right)=\frac{1}{8}(3-2ln3).$$

При обчисленні враховано, що $\lim\limits_{B\to+\infty}ln\left|\frac{B+1}{B-1}\right|=ln\lim\limits_{B\to+\infty}\left|\frac{B+1}{B-1}\right|=$

$=ln1=0$, $\lim\limits_{B\to+\infty}\frac{1}{B-1}=\lim\limits_{B\to+\infty}\frac{1}{B+1}=0$.

Тобто границя скінченна, інтеграл збігається.

9. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^{B}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

Обчислимо інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, як інтеграл від іраціональної функції, за допомогою тригонометричної підстановки $x=tgt$.

Отримаємо : $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{matrix}x=tgt\\ dx=\frac{dt}{cos^2t}\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{cos^2t\cdot tgt\cdot\sqrt{tg^2t+1}}=$

$$=\int\frac{dt}{cos\,t\cdot sin\,t\cdot\sqrt{\frac{1}{cos^2t}}}=\int\frac{dt}{sin\,t}=ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+C=ln\left|tg\left(\frac{arctgx}{2}\right)\right|+C.$$

Тепер $\lim\limits_{B\to+\infty}ln\left|tg\left(\frac{arctgx}{2}\right)\right|\Bigg|_0^B=\lim\limits_{B\to+\infty}\left(ln\left|tg\left(\frac{arctgB}{2}\right)\right|-ln\left|tg\left(\frac{arctg0}{2}\right)\right|\right)=$

$=0+\infty=\infty$, оскільки при $B\to+\infty: ln\left|tg\left(\frac{arctgB}{2}\right)\right|=ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|=ln1=0$, а

$ln\left|tg\left(\frac{arctg0}{2}\right)\right|=ln0\to-\infty$.

Границя нескінченна, отже інтеграл розбігається.

Перейдемо до розглядання прикладів, які пов'язані з використанням ознак збіжності невласних інтегралів.

**Дослідити на збіжність інтеграли.**

10. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Підінтегральна функція задовольняє нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$, тому він збігається. Користуючись першою ознакою порівняння, стверджуємо, що $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ теж збігається.

11. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$.

Підінтегральна функція неперервна і додатна при $x > 2$, причому справджується така нерівність:

$$\frac{x}{\sqrt{x^4-1}} > \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x}.$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ - він розбігається $(\alpha = 1)$, тому за ознакою порівняння, отримаємо, що інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$ теж розбігається.

12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4}$.

Для підінтегральної функції справджується тотожність:

$$\frac{|\cos x|}{x^2+4} \le \frac{1}{x^2+4} \le \frac{1}{x^2}.$$

Тепер інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається $(\alpha = 2 > 1)$, тоді $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+4} dx$ так само збігається. За третьою ознакою збіжності робимо висновок, що вихідний інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4}$ теж збігається, причому абсолютно.

13. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

У цьому прикладі вже не просто вибрати для порівняння таку функцію, щоб можна було застосувати першу ознаку збіжності . Тому застосуємо граничну ознаку порівняння, вибравши для порівняння функцію $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$, інтеграл від якої $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ збігається $(\alpha > 1)$.

Одержимо: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x \cdot x^{3/2}}{1+x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}\cdot x^{3/2} + \ln x \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}{2x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{3}{2}\ln x\right)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{2}\ln x}{2\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Границя скінченна, тоді $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ так само буде збігатися.

***<u>Зауваження.</u>*** Для розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ було використано правило Лопіталя.

## Завдання для самостійної роботи

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли:

**1.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

**2.** $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$;

**3.** $\int\limits_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2+3}$;

**4.** $\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{7-2x}dx$;

**5.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$;

**6.** $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

**7.** $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cdot cos\, x dx$;

**8.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{4+5x^2}$;

**9.** $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$.

Дослідити на збіжність інтеграли:

**10.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$;

**11.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{sin\, x}{x^2}dx$;

**12.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{13}dx}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}$;

**13.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(5+cos\, x)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

**14.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$.

### 2.2. Невласні інтеграли другого роду (від необмежених функцій)

Як відомо, необхідною умовою інтегровності функції на відрізку $[a;b]$ є її обмеженість. Проте є задачі, що приводять до розгляду інтеграла від функції,

яка майже на всьому відрізку обмежена і стає необмеженою поблизу деякої точки, наприклад, поблизу однієї чи обох меж. Тоді природньо поширити поняття визначеного інтеграла і на такі функції, ввівши при цьому додаткові означення.

Отже, нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад, поблизу точки $x=a$, зокрема на відрізку $[a;a+\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$. Нехай $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;\ b]$. Точку $a$ при цьому називають ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

***<u>Означення 1.</u>*** ***Невласним інтегралом другого роду*** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b]$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\ . \qquad \textbf{(2.5)}$$

Якщо ця границя скінченна, то інтеграл називається ***збіжним***. Якщо границя нескінченна, або взагалі не існує, тоді інтеграл називається ***розбіжним***. Функція $f(x)$ при цьому називається інтегровною на данному проміжку.

Нехай тепер функція $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ і не є інтегровною на відрізку $[b-\varepsilon;b]$.

***<u>Означення 2.</u>*** ***Невласним інтегралом другого роду*** функції $f(x)$ на проміжку $[a;b)$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad \textbf{(2.6)}$$

У цьому випадку точка $b$ вважається ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

Збіжність (розбіжність) інтеграла й інтегровність функції $f(x)$ на відповідному проміжку визначають так само, як і для інтеграла (2.5). Інші можливі випадки можуть бути зведені до вже розглянутих.

Розглянемо випадок, коли особливими точками функції є одночасно точки $x=a$ й $x=b$. Це означає, що функція $f(x)$ необмежена на $[a;a+\varepsilon]$ та на $[b-\varepsilon;b]$, а на будь-якому відрізку $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ вона є інтегровною .

Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, де $x=c$ - довільна точка інтервалу $(a;b)$.

В цьому разі $$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^c f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Іноді може трапитися випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ є необмеженою поблизу точки $x=c$, яка знаходиться всередині відрізка $[a;b]$. В інших частинах відрізка $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегровна. Тобто точка $x=c$ є ***особливою точкою*** функції $f(x)$.

Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, але тепер у цій рівності обидва інтеграла правої частини означаються формулами (2.5) та (2.6). Позначають: $$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad \textbf{(2.8)}$$

Висновок про збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ у формулах (2.7) та (2.8) роблять тільки в тому випадку, коли обидві границі правих частин цих формул, знайдені незалежно одна від одної, існують і скінченні. Інтеграл розбігається, якщо хоча б одна з цих границь нескінченна або взагалі не існує.

Зауважимо, що ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні подібним ознакам для інтегралів першого роду. При дослідженні на збіжність інтегралів, де особливою точкою є точка $x=a$, для порівняння використовують функції $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, інтеграл від яких $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ збігається, якщо $0<\alpha<1$ і розбігається, якщо $\alpha\geq 1$. Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є

точка $x=b$, використовують функції $\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$, інтеграл від яких $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ так само збігається при $0<\alpha<1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

### *Зразки розв'язування задач*

**Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.**

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \{x=0 - \textit{особлива точка}\} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^{1} =$

$= 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0} 1 - 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon} = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2$. Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається.

2. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{4-x} = \{x=4 - \textit{особлива точка}\} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{4-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0} ln|4-x| \Big|_{2}^{4-\varepsilon} =$

$= -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(ln|4-4+\varepsilon| - ln|4-2|\right) = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0} ln\,\varepsilon + \lim\limits_{\varepsilon\to+0} ln\,2 = \infty$, оскільки перша границя нескінченна (при $\varepsilon \to +0$ $ln\,\varepsilon \to -\infty$). Тобто наш інтеграл розбігається.

3. $\int\limits_{-2}^3 \frac{dx}{x^2-x-6} = \left\{\begin{matrix} x=-2, \quad x=3- \\ \textit{особливі точки} \end{matrix}\right\} = \int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{x^2-x-6} + \int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-x-6} =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-2+\varepsilon}^0 \frac{dx}{x^2-x-6} + \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-x-6}$.

Обчислимо інтеграл окремо:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-6} = \int \frac{dx}{x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} = \frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}} ln\left|\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{5} ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C.$$

Повертаючись до границь, отримаємо:

$$\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to+0} ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\Bigg|_{-2+\varepsilon}^{0}+\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to+0} ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\Bigg|_{0}^{3-\varepsilon}=\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(ln\left|-\frac{3}{2}\right|-ln\left|\frac{-5+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(ln\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|-ln\left|-\frac{3}{2}\right|\right)=\frac{1}{5}\left(ln\frac{3}{2}-\lim_{\varepsilon\to+0} ln\left|\frac{\varepsilon-5}{\varepsilon}\right|\right)+\frac{1}{5}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|-ln\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\lim_{\varepsilon\to+0} ln\left|\frac{-\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|-\lim_{\varepsilon\to+0} ln\left|\frac{\varepsilon-5}{\varepsilon}\right|\right).$$ Оскільки обидві границі нескінченні, то інтеграл розбігається.

4. $$\int_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}=\{x=4-\textit{особлива точка}\}=\int_2^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}+\int_4^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_2^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{4+\varepsilon}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt[3]{4-x}\Bigg|_{2}^{4-\varepsilon}-$$

$$-3\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt[3]{4-x}\Bigg|_{4+\varepsilon}^{6}=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt[3]{4-4+\varepsilon}-\sqrt[3]{2}\right)-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt[3]{-2}-\sqrt[3]{4-4-\varepsilon}\right)=$$

$$=-3\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt[3]{\varepsilon}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-2}+\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt[3]{-\varepsilon}\right)=-3\left(0-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+0\right)=6\sqrt[3]{2}.$$ Обидві границі скінченні, інтеграл збігається.

5. $$\int_0^1\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\{x=0-\textit{особлива точка}\}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$$

Обчислимо інтеграл окремо:

$$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\left|\begin{matrix}1/x=t\\ -dt/x^2=dt\end{matrix}\right|=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

Тоді $\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(e^1-e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)=-e+\lim_{\varepsilon\to+0}e^{\frac{1}{\varepsilon}}=\infty$, бо при $\varepsilon\to+0$ $e^{\frac{1}{\varepsilon}}\to+\infty$.

Отже наш інтеграл розбігається.

6. $\int\limits_0^1 \ln x dx = \{x = 0 - \textit{особлива точка}\} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx.$

Обчислимо інтеграл, застосовуючи метод інтегрування частинами:

$$\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = \left( u \cdot v \Big|_a^b - \int\limits_a^b v \cdot du \right) = x \cdot \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 x \cdot \frac{dx}{x} = 1 \cdot \ln 1 -$$

$$- \varepsilon \ln \varepsilon - \int\limits_\varepsilon^1 dx = 0 - \varepsilon \ln \varepsilon - x \Big|_\varepsilon^1 = -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon .$$

Повертаючись до границі, отримаємо:

$$\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left( -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon \right) = -1 - \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \ln \varepsilon = -1 - \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = -1 - \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} =$$

$= -1 + \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon = -1 + 0 = -1$ (при обчисленні границі застосовано правило Лопіталя).

Як бачимо,границя скінченна, наш інтеграл збігається.

7. $\int\limits_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \{x = 2 - \textit{особлива точка}\} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

Обчислимо інтеграл окремо, застосовуючи тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{8 \sin^3 t \cdot 2 \cos t dt}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}} = 8 \int \frac{\sin^3 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} =$$

$$= 8 \int \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\cos t} dt = 8 \int \sin^3 t dt = 8 \int \sin^2 t \cdot \sin t dt = \left| \begin{matrix} z = \cos t \\ dz = -\sin t dt \end{matrix} \right| = -8 \int \left( 1 - z^2 \right) \cdot dz =$$

$$= -8 \int dz + 8 \int z^2 dz = -8z + \frac{8}{3} z^3 + C = -8 \cos t + \frac{8}{3} \cos^3 t + C = -8 \cos \left( \arcsin \frac{x}{2} \right) +$$

$$+ \frac{8}{3} \cos^3 \left( \arcsin \frac{x}{2} \right) + C .$$

Тоді будемо мати:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-8\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+\frac{8}{3}\cos^3\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{2-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-8\cos\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{3}\cos^3\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}\right)+8\cos(\arcsin 0)-\frac{8}{3}\cos^3(\arcsin 0)\right)=-8\lim_{\varepsilon\to+0}\cos\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}\right)+$$

$$+\frac{8}{3}\lim_{\varepsilon\to+0}\cos^3\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}\right)+8-\frac{8}{3}=-8\cdot 0+\frac{8}{3}\cdot 0+8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.$$

При обчисленні границь враховано, що $\arcsin 0=0, \arcsin 1=\frac{\pi}{2}, \cos 0=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Тобто наш інтеграл збігається.

8. $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos x}=\{x=0-\textit{особлива точка}\}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos x}.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо універсальну підстановку:

$$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=tg\,x/2, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}=2\cdot\int\frac{dt}{2t^2}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+C.$$

Тоді $$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{tg\,x/2}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{tg\,\pi/4}-\frac{1}{tg\,\varepsilon/2}\right)=-1+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{tg\frac{\varepsilon}{2}}=\infty,$$ бо якщо $\varepsilon\to+0$ $\frac{1}{tg\frac{\varepsilon}{2}}\to\infty$. Границя скінченна, інтеграл розбігається.

**Дослідити на збіжність інтеграли.**

9. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Підінтегральна функція має на проміжку інтегрування особливу точку $x=2$. Розглянемо $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{(x-2)\cdot(x+2)}}<\frac{1}{(x-2)^{1/2}}$.

Виберемо для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{(x-2)^{1/2}}$, інтеграл від якої $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/2}}$ збігається $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$. Згідно з ознакою порівняння, заданий інтеграл також збігається.

10. $\int\limits_2^1 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{sin(x-1)}}$.

Підінтегральна функція має особливу точку $x=1$. Розглянемо $f(x)=\frac{dx}{(x-1)\sqrt{sin(x-1)}}\geq\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\frac{1}{(x-1)^{3/2}}$.

Виберемо для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{(x-1)^{3/2}}$, інтеграл від якої $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$ розбігається $\left(\alpha=\frac{3}{2}>1\right)$. Знову застосовуючи ознаку порівняння, робимо висновок, що наш інтеграл також розбігається.

11. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

Маємо, що $x=0$ - особлива точка для підінтегральної функції.

Розглянемо $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$ і оберемо для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{x^{2/3}}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння, а саме:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^{2/3}}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}\cdot\sqrt[3]{1+x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1,$$

а інтеграл $\int_0^2\frac{dx}{x^{2/3}}$ збігається $\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)$. Згідно граничній ознаці порівняння, $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$ так само збігається.

12. $\int_{-1/2}^{2}\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{x^2-x-2}}$.

Підінтегральна функція має особливу точку $x=2$. Дослідимо інтеграл на абсолютну збіжність:

$\int_{-1/2}^{2}\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}}\right|dx$. Маємо $\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}}\right|<\frac{1}{\sqrt[3]{2+x-x^2}}$.

Порівняємо функцію правої частини нерівності із функцією $g(x)=\frac{1}{(2-x)^{2/3}}$, після чого застосуємо граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{\sqrt[3]{2+x-x^2}}=\lim_{x\to 2-0}\frac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)(2-x)}}=\lim_{x\to 2-0}\sqrt[3]{\frac{2-x}{x+1}}=0.$$

Границя скінченна і дорівнює нулю. Оскільки інтеграл $\int_{-1/2}^{2}\frac{dx}{(2-x)^{2/3}}$ збігається $\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)$, за граничною ознакою порівняння інтеграл $\int_{-1/2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x-x^2}}$ також збігається. Тоді за ознакою порівняння збігається і інтеграл $\int_{-1/2}^{2}\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2-x-2}}\right|dx$. Отже, на підставі третьої ознаки збіжності, вихідний інтеграл абсолютно збігається.

## Завдання для самостійної роботи

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли:

**1.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

**2.** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$;

**3.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$;

**4.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

**5.** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\sin x^2}$;

**6.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

**7.** $\int\limits_0^3 \frac{dx}{2x^2+x^4}$;

**8.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

**9.** $\int\limits_0^1 x \cdot \ln x dx$;

**10.** $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$;

Дослідити на збіжність інтеграли:

**11.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$;

**12.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$;

**13.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

**14.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin dx}{\sqrt{x^3}}$;

## Розділ 3
## ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

### 3.1. Обчислення площ плоских фігур

Визначений інтеграл від додатної неперервної функції $f(x)$, заданої на відрізку $[a;b]$, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $x = a,\ x = b,\ y = 0$ (рис. 3.1):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \textbf{(3.1)}$$

В разі, коли $f(x) < 0$ на $[a;b]$ (рис.3.2)

$$S = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \textbf{(3.2)}$$

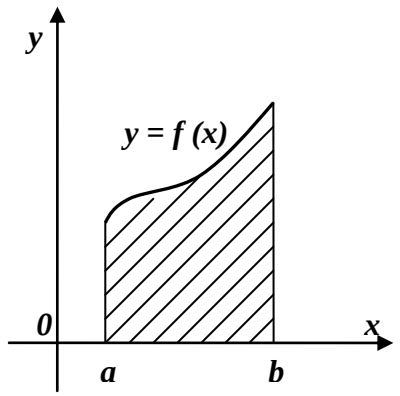



**Рис. 3.1**

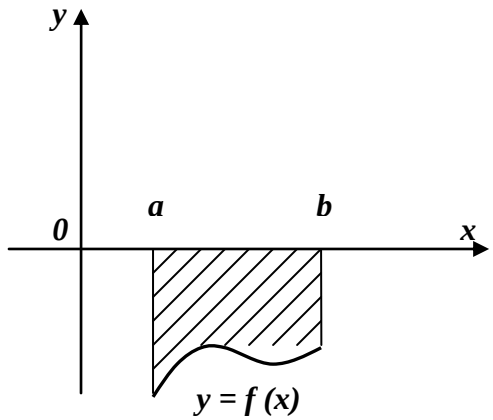



**Рис. 3.2**

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ скінчене число разів змінює знак, то

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a,\quad x = b$ за умови, що $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис.3.3) знаходять за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad \textbf{(3.3)}$$

У випадку, коли фігура обмежена кривою $x = \psi(y)$ $(\psi(y) > 0)$ та прямими $y = c, y = d, x = 0$ (рис.3.4), її площу знаходять за формулою

$$S = \int_c^d \psi(y)dy. \qquad \textbf{(3.4)}$$

Якщо крива задана ***параметричними рівняннями*** $x = x(t), y = y(t),$ $t_1 < t < t_2$, де $x(t), y(t)$ - неперервні функції, що мають неперервні похідні на відрізку $[t_1; t_2]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x = a,\quad x = b$ та відрізком $[a; b]$ осі $Ox$, визначається за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\,dt, \qquad \textbf{(3.5)}$$

де $t_1$ і $t_2$ - значення параметра $t$, при яких $x(t_1) = a,\quad x(t_2) = b$ $(y(t) \geq o$ **при** $t_1 \leq t \leq t_2)$.

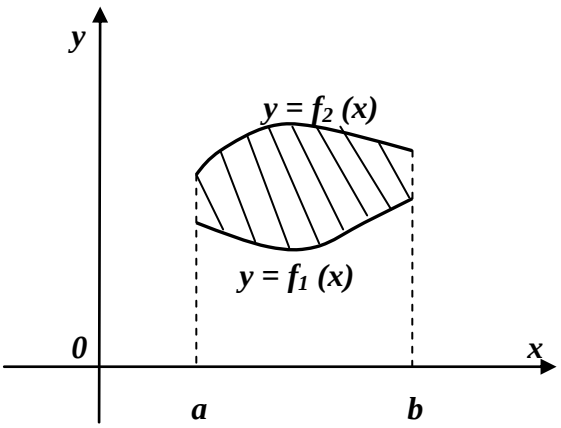



**Рис. 3.3**

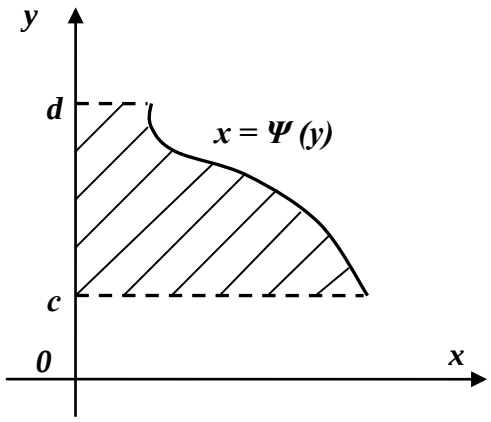



**Рис. 3.4**

У ***полярній системі координат*** площа криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, $0 \le \varphi_2 - \varphi_1 \le 2\pi$ та відповідними відрізками променів $\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2$ (рис. 3.5), дорівнює

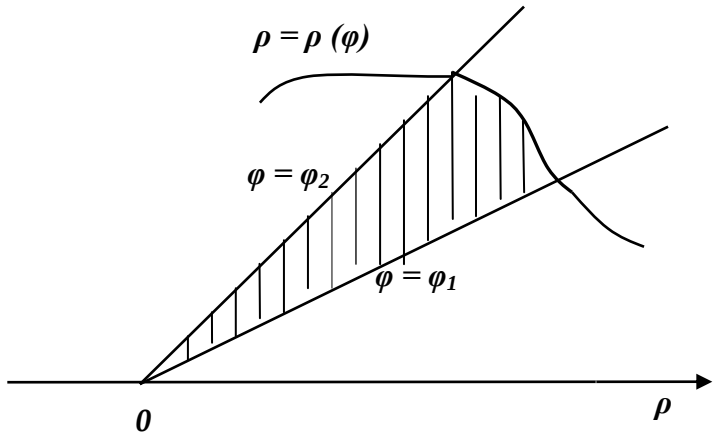



**Рис. 3.5**

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad \textbf{(3.6)}$$

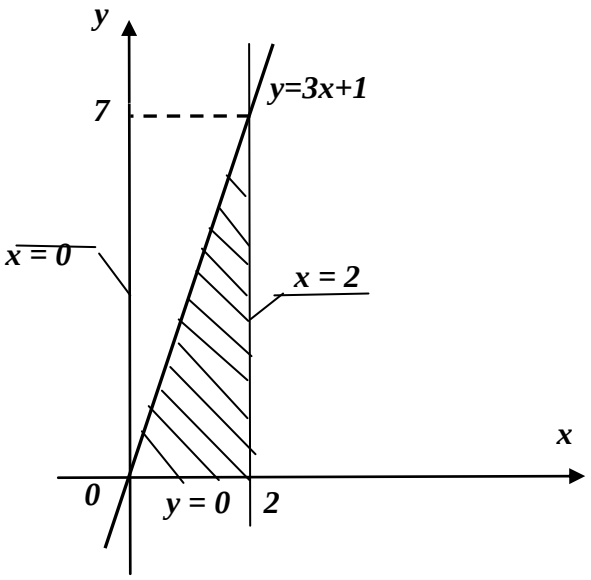
***Зразки розв'язування задач***

**Обчислити площі фігур, обмежених лініями.**

1. $y = 3x + 1, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$.

***Розв'язання***

Побудуємо дані лінії і визначимо фігуру, площу якої треба знайти.




Площа визначається за формулою (3.1) :

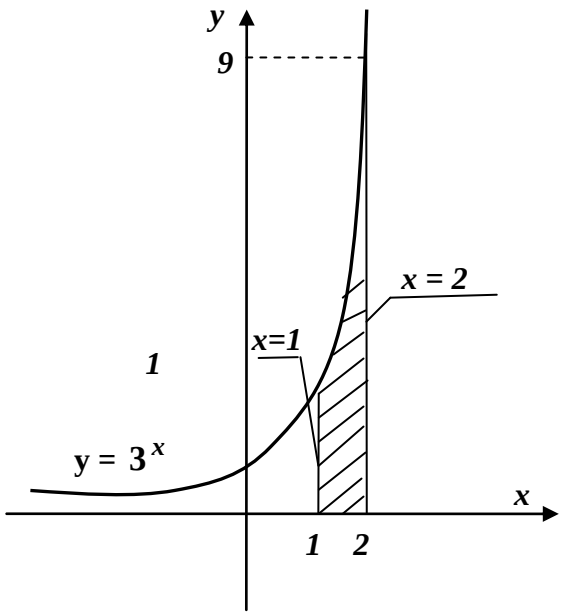
$$S = \int_0^2 (3x+1)dx = \left(\frac{3x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 2 = 8 \text{ кв. од.}$$

2. $y = 3^x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$

***Розв'язання***

Зобразимо фігуру, площу якої шукаємо.




Тоді $S = \int_1^2 3^x dx =$

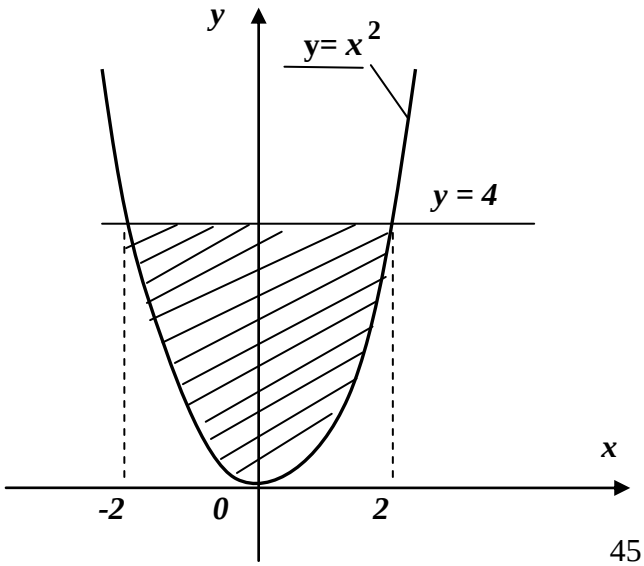
$$= \frac{3^x}{ln3}\Big|_1^2 = \frac{1}{ln3}\left(3^2 - 3^1\right) =$$

$$= \frac{6}{ln3} \text{ кв. од.}$$

3. $y = x^2, \quad y = 4.$

***Розв'язання***

Фігура обмежена параболою $y = x^2$ і прямою $y = 4$.




Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину ліній $y = x^2$ та $y = 4$:

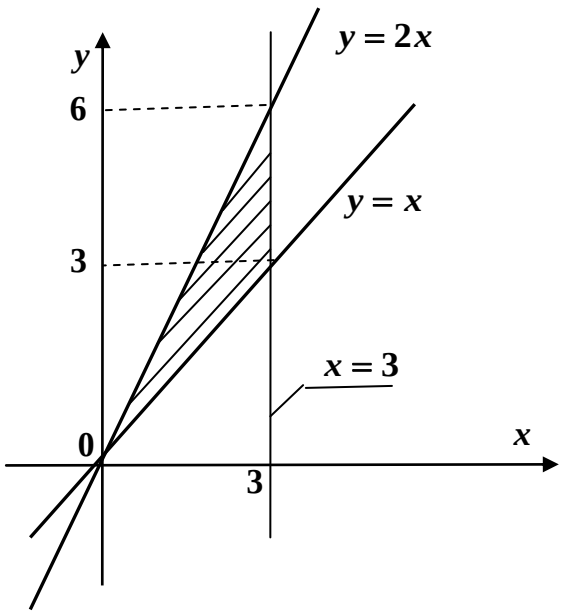
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$, звідки $x^2 = 4$, $x = \pm 2$..

Як бачимо, фігура симетрична відносно осі $Oy$, тому обчислимо площу її правої половини, а загальний результат подвоємо.

Будемо мати: $S = 2\cdot\int_0^2 x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\left(2^3 - 0^3\right) = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$ кв. од.

4. $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 3$.

***Розв'язання***




Побудуємо дані лінії.

Фігура на відрізку $[0;3]$ обмежена зверху $y = 2x$, знизу прямою $y = x$. Її площу знайдемо за формулою (3.3):

$$S = \int_0^3 (2x - x)dx = \int_0^3 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ кв. од.}$$

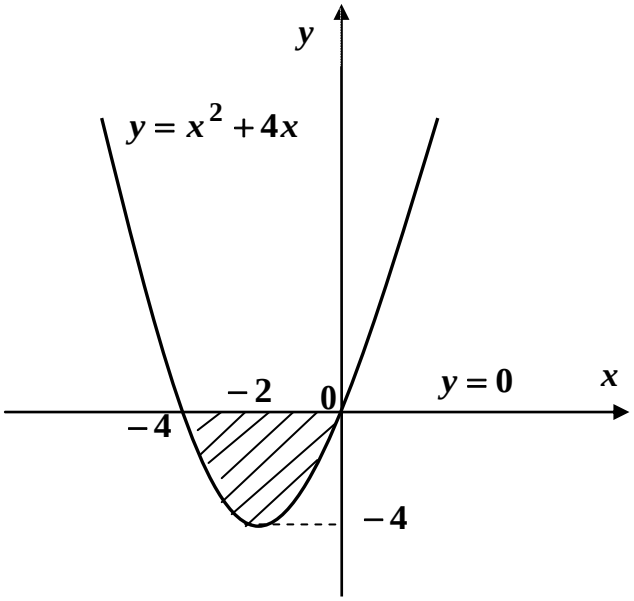
5. $y = x^2 + 4x, \quad y = 0$.

***Розв'язання***

Побудуємо параболу $y = x^2 + 4x$. Приведемо рівняння до канонічного виду, виділивши повний квадрат:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 4, \quad y + 4 = x^2 + 4x + 4, \quad y + 4 = (x+2)^2.$$

Отже, парабола $y = x^2 + 4x$ має вершину в точці $(-2;-4)$ і перетинає вісь $Ox$ в точках $x_1 = -4, \quad x_2 = 0 \quad \left(x^2 + 4x = 0\right)$.




На відрізку $[-4;0]$ функція $y = x^2 + 4x$ має від'ємні значення. За формулою (3.2) шукана площа дорівнює:

$$S = -\int_{4}^{0}\left(x^2 + 4x\right)dx = -\left(\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{3}\cdot(-4)^3 + 2(-4)^2\right) = -\frac{64}{3} + 32 =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ кв. од.}$$

6. $x = -y^2 + 8y - 7, \quad x = 0$.

Канонічний вид параболи $x = -y^2 + 8y - 7$:

$x = -\left(y^2 - 8y + 16\right) + 16 - 7,$ тоді $x - 9 = -(y-4)^2$.

Парабола симетрична відносно прямої $y = 4$, має вершину $(9;4)$.

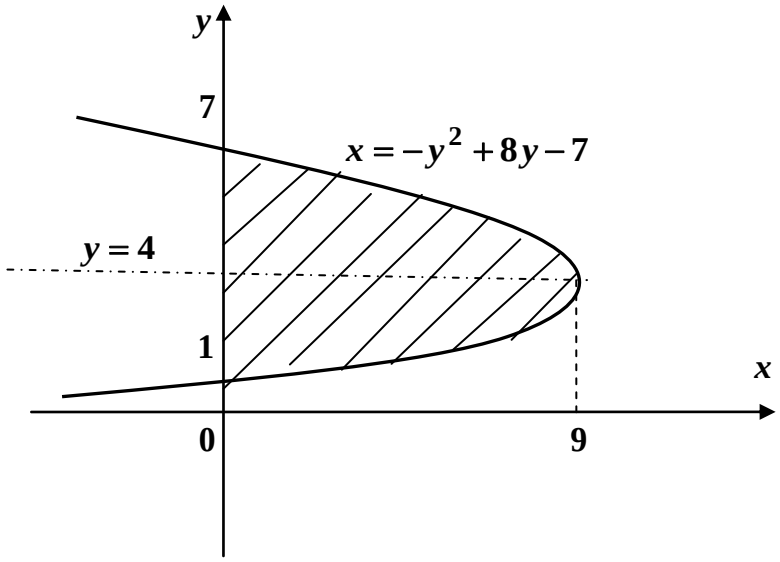
Точки перетину з віссю $Oy$:

$\begin{cases} x = -y^2 + 8y - 7 \\ x = 0 \end{cases}$, тоді

$y^2 - 8y + 7 = 0$, звідки

$y_1 = 1, \quad y_2 = 7$.

За формулою (3.4) знайдемо площу:




$$S = \int_{1}^{7}\left(-y^2 + 8y - 7\right)dy =$$

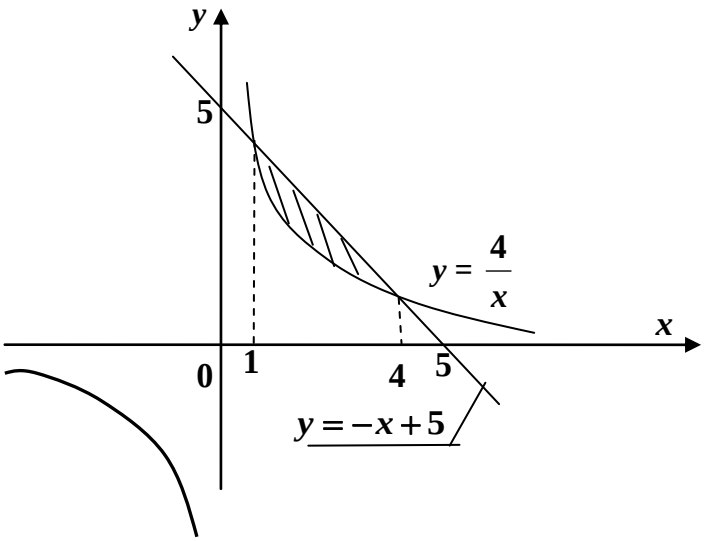
$$= \left(-\frac{y^3}{3} + 8\cdot\frac{y^2}{2} - 7y\right)\Bigg|_{1}^{7} =$$

$$= \left(-\frac{343}{3} + 4\cdot 49 - 49\right) - \left(-\frac{1}{3} + 4 - 7\right) = -\frac{343}{3} + 196 - 49 + \frac{1}{3} + 3 = 36 \text{ кв. од.}$$

7. $y=\frac{4}{x}, \quad x+y-5=0$.

***Розв'язання***

Побудуємо дані гіперболу та пряму. Для знаходження абсцис точок перетину графіків розв'яжемо систему рівнянь:




$\begin{cases} y=\frac{4}{x} \\ y=-x+5 \end{cases}$, тоді $\frac{4}{x}=-x+5$,

$4=-x^2+5x, \quad x^2-5x+4=0$,

звідки $x_1=1 \quad x_2=4$.

Отже, $S=\int_1^4\left(-x+5-\frac{4}{x}\right)dx=$

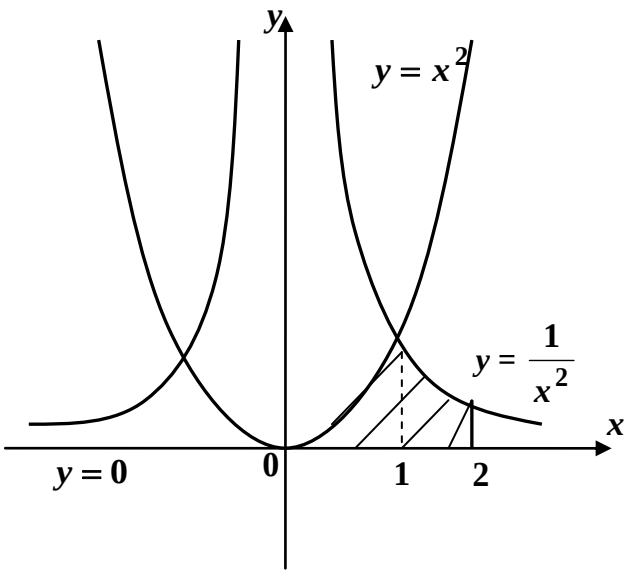
$$=\left(-\frac{x^2}{2}+5x-4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4=\left(-8+20-4\ln 4\right)-\left(-\frac{1}{2}+5-4\ln 1\right)=12-4\ln 4+\frac{1}{2}-5=$$

$=7{,}5-4\ln 4$ кв. од.

8. $y=x^2, \quad y=\frac{1}{x^2}, \quad x=2, \quad y=0$.

***Розв'язання***

Побудуємо дані лінії.




Точки перетину графіків:

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{1}{x^2} \end{cases}$, тоді $x^2=\frac{1}{x^2}$,

$x^4=1$, звідки $x=\pm 1$.

Як бачимо, фігура розташована у I чверті, тому оберемо $x=1$. На відрізку $[0;2]$ фігура зверху обмежена спочатку графіком функції $y=x^2$ (якщо $0\le x\le 1$), а потім

графіком $y=\frac{1}{x^2}$ (якщо $1\le x\le 2$). Тому площу всієї фігури знайдемо як суму двох площ, кожну з яких обчислимо за формулою (3.1).

А саме: $S=S_1+S_2$,

де $S_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$ кв. од., $S_2=\int_0^2\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ кв. од.

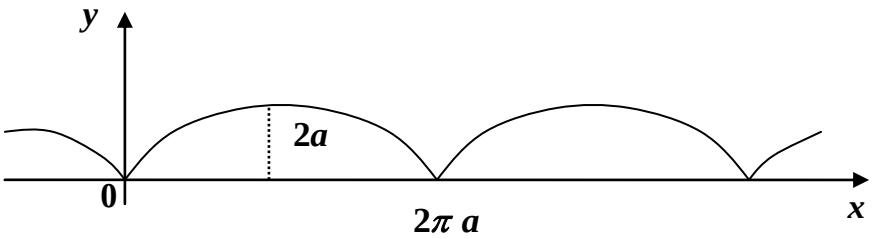
Отримаємо: $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ кв. од.

Перейдемо до розглядання прикладів обчислення площ у параметричній системі координат для ***циклоїди*** та ***кардіоїди***. Обидві ці криві мають механічне походження та описуються точкою кола радіуса $a$, що котиться без ковзання по деякій лінії. Для циклоїди цією лінією буде пряма, а для кардіоїди – знов коло радіуса $a$, що має із першим колом зовнішній дотик.

9. Знайти площу фігури обмеженої віссю $0x$ та однією аркою ***циклоїди***
$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

***Розв'язання***

Поглянемо на вигляд цієї кривої.




Параметр $t$ буде змінюватися від $0$ до $2\pi$. Використавши формулу (3.5), маємо:

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(t-\sin t)dt=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a^2\left[\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)-0\right]=$$

$=a^2\cdot 3\pi=3\pi a^2$ кв. од.

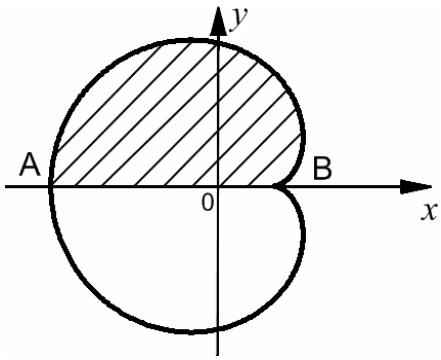
Таким чином, площа однієї арки циклоїди втричі більше площі кола, що котиться.

10. Знайти площу, обмежену ***кардіоїдою*** $x=a(2\cos t-\cos 2t)$,

$y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

***Розв'язання***

Наведемо вигляд цієї кривої.




Крива симетрична відносно осі $Ox$. Обчислимо половину площі і подвоємо результат. Точкам $A$ та $B$ відповідають значення параметрів $t_1=\pi,\quad t_2=0$.

Для обчислення площі використаємо формулу (3.6).

Обчислимо $x'(t)$: $x'(t)=a(-2\sin t+2\sin 2t)$.

Тоді $\frac{1}{2}S=\int_\pi^0 a(2\sin t-\sin 2t)\cdot 2a(\sin 2t-\sin t)dt=2a^2\int_\pi^0\left(2\sin t\sin 2t-2\sin^2 t-\right.$

$$\left.-\sin^2 2t+\sin t\sin 2t\right)dt=2a^2\int_\pi^0\left(3\sin t\sin 2t-2\sin^2 t-\sin^2 2t\right)dt=$$

$$= 2a^2\int_{\pi}^{0}\left[\frac{3}{2}(\cos t-\cos 3t)-(1-\cos 2t)-\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\right]dt = 2a^2\int_{\pi}^{0}\left(\frac{3}{2}\cos t-\frac{3}{2}\cos 3t+\right.$$

$$\left.+\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t-\frac{3}{2}\right)dt = 2a^2\left(\frac{3}{2}\sin t-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{3}{2}t\right)\Bigg|_{\pi}^{0} =$$

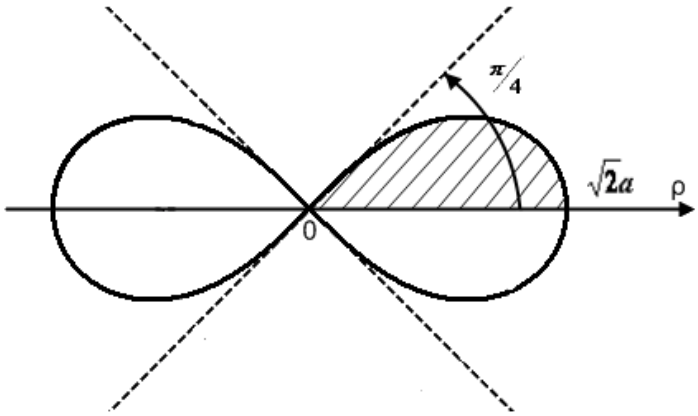
$$= 2a^2\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi = 3\pi a^2.$$

Отримаємо: $S = 2\cdot 3\pi a^2 = 6\pi a^2$ кв. од.

Тепер ознайомимося із цікавими кривими у полярній системі координат.

11. Обчислити площу, обмежену ***лемніскатою Бернуллі*** $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

***Розв'язання***




Прослідкуємо, як змінюється кут $\varphi$, коли радіус-вектор точки на лемніскаті описує чверть шуканої площі.

При $\varphi = 0$, $\rho = a\sqrt{2}$. Визначимо, чому дорівнює кут $\varphi$, коли радіус-вектор дорівнюватиме $0$. Підставляючи $\rho = 0$ в рівняння кривої, отримаємо: $2a^2\cos 2\varphi = 0$, $\cos 2\varphi = 0$, $2\varphi = \frac{\pi}{2}$, звідки $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Таким чином, на чверті площі полярний кут змінюється в межах від $0$ до $\frac{\pi}{4}$. Тоді за формулою (3.6):

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} 2a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \frac{a^2}{2}.$$

Вся площа $S = 4\cdot\frac{a^2}{2} = 2a^2$ кв. од.

12. Обчислити площу однієї пелюстки рози, яка задається рівнянням $\rho = a\sin 3\varphi$.

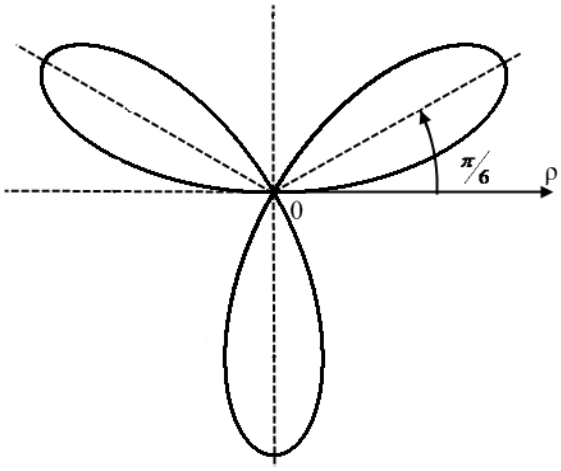
***<u>Зауваження.</u>*** Зазначимо, що криві задані рівняннями $\rho = a\sin k\varphi$ (або $\rho = a\cos k\varphi$), де $a$ та $k$ - постійні величини, називаються ***розами***. Якщо $k$ - парне число, то крива має $2k$ - пелюсток, якщо $k$ - непарне число, то крива має $k$ - пелюсток.

Щоб знайти площу однієї пелюстки, визначимо, як змінюється полярний кут $\varphi$, коли радіус-вектор описує цю площу.

Нехай $\rho = 0$. Тоді $a\sin k\varphi = 0,\ \sin k\varphi = 0$, звідки $k\varphi = \pi n,\ \varphi = \dfrac{\pi n}{k}$.

При $n = 0$ $\varphi = 0$, при $n = 1$ $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Тобто кут $\varphi$ змінюється від $0$ до $\dfrac{\pi}{k}$.

***Розв'язання***




Повернемось до нашого прикладу: $\rho = a\sin 3\varphi$ ***- 3-х пелюсткова роза.***
Описуючи площу однієї пелюстки, радіус-вектор пробігає кут від $0$ до $\dfrac{\pi}{3}$.

Тоді $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi\, d\varphi =$

$$= \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{4}a^2\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}a^2\left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\sin 2\varphi\right) - 0\right] =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{12}$$ кв. од.

13. Обчислити площу, обмежену петлею ***декартового листа***, який визначається рівнянням $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

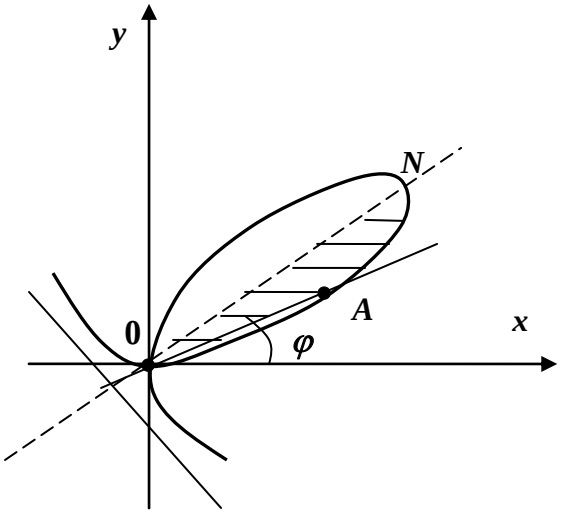
### *Розв'язання*

Для обчислення площі перейдемо до полярних координат, поклавши $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$.

Отримаємо: $\rho^3 cos^3\varphi + \rho^3 sin^3\varphi - 3a \cdot \rho cos\varphi \rho sin\varphi = 0$,

$$\rho^3\left(cos^3\varphi + sin^3\varphi\right) - 3a\rho^2 cos\varphi sin\varphi = 0,$$

$$\rho = \frac{3a cos\varphi sin\varphi}{cos^3\varphi + sin^3\varphi}.$$




Так як при заміні $x$ на $y$, а $y$ на $x$ рівняння на змінюється, то крива симетрична відносно прямої $y = x$. Тому шукану площу можна розглядати як подвоєну площу $OAN$. При цьому радіус-вектор $OA$ повертається від початкового положення $\varphi = 0$ на кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Отже, $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{3a sin\varphi cos\varphi}{sin^3\varphi + cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi =$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{sin^2\varphi cos^2\varphi}{sin^6\varphi + 2sin^3\varphi cos^3\varphi + cos^6\varphi}d\varphi.$$

Винесемо в знаменнику $cos^6\varphi$ за дужки:

$$I = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{sin^2\varphi cos^2\varphi}{cos^6\varphi\left(\frac{sin^6\varphi}{cos^6\varphi} + \frac{2sin^3\varphi}{cos^3\varphi} + 1\right)}d\varphi = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{sin^2\varphi}{cos^4\varphi\left(tg^6\varphi + 2tg^3\varphi + 1\right)}d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{tg^2\varphi}{cos^2\varphi\left(tg^3\varphi + 1\right)^2}d\varphi.$$

Зробимо заміну $tg\varphi = t$, $\dfrac{d\varphi}{cos^2\varphi} = dt$. Нові межі інтегрування: $t_1 = tg0 = 0$, $t_2 = tg\dfrac{\pi}{4} = 1$.

Отже, $\dfrac{1}{2}S = \dfrac{9}{2}a^2\int\limits_0^1 \dfrac{t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}$.

Ще раз зробимо заміну $t^3 + 1 = z$, $t^2dt = \dfrac{1}{3}dz$, $z(0) = 1$, $z(1) = 2$.

Тоді: $\dfrac{1}{2}S = \dfrac{9}{2}a^2\int\limits_1^2 \dfrac{\frac{1}{3}dz}{z^2} = \dfrac{3}{2}a^2\int\limits_1^2 z^{-2}dz = \dfrac{3}{2}a^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{z}\right)\Bigg|_1^2 = \dfrac{3}{2}a^2\left(-\dfrac{1}{2}+1\right) = \dfrac{3}{4}a^2$.

Отримаємо: $S = 2\cdot\dfrac{3}{4}a^2 = \dfrac{3}{2}a^2$ кв. од.

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1. $y = 3x - x^2$, $y = 0$;

2. $y = \sqrt{x-1}$, $y = x+1$, $x = 1$, $x = 3$;

3. $y = -x^2 + 4$, $y + x - 2 = 0$;

4. $y = cos\,x$, $y = sin\,x$, $x = 0$;

5. $xy = 4$, $y = 3x + 1$, $y = 1$;

6. $\begin{cases} x = 3\,cos\,t - cos\,3t \\ y = 3\,sin\,t - sin\,3t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = e^t\,cos\,t \\ y = e^t\,sin\,t, \quad 0 \le t \le 1; \end{cases}$

8. $\rho = 2 + cos\varphi$, $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$;

9. $\rho = 4sin2\varphi$.

## 3.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, причому $f(x)$ неперервна разом із своєю похідною на $[a;b]$. Тоді довжина дуги кривої визначається формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Вираз $dL = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ називається диференціалом дуги. В разі, коли крива задається рівнянням $x = \varphi(y),\ y \in [c;d]$ довжина дуги кривої обчислюється так:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\, dy. \qquad \textbf{(3.8)}$$

У разі ***параметричного задання*** кривої $x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$, довжина дуги дорівнює:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \qquad \textbf{(3.9)}$$

Якщо ж гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ ***в полярних координатах***, то

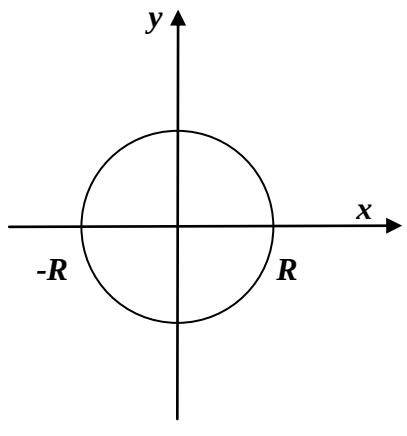
$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \qquad \textbf{(3.10)}$$

### *Зразки розв'язування задач*

1. Знайти довжину кола.

### *Розв'язання*

Візьмемо коло радіуса $R$ з центром в початку координат. Його рівняння $x^2 + y^2 = R^2$.




Щоб використати формулу (3.7) знайдемо $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Знак плюс відповідає верхній половині кола, знак мінус – нижній.

Знайдемо довжину чверті кола, що лежить в першій координатній чверті. Обчислимо вираз $dL=\sqrt{1+y'^2}dx$.

Маємо: $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, тоді

$1+y'^2=1+\dfrac{x^2}{R^2-x^2}=\dfrac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}=\dfrac{R^2}{R^2-x^2}$, тобто

$dL=\sqrt{1+y'^2}dx=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$.

Абсциса $x$ точки кола в першій чверті змінюється від $0$ до $R$. Тоді $\dfrac{L}{4}=\int\limits_0^R\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\,arcsin\dfrac{x}{R}\Big|_0^R=R(arcsin1-arcsin0)=R\cdot\dfrac{\pi}{2}$. Довжина кола $L=4\cdot R\cdot\dfrac{\pi}{2}=2\pi R$.

Розв'яжемо цю ж задачу, якщо коло задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}.$$

Щоб застосувати формулу (3.9) обчислимо $x'(t)=-R\sin t,\ y'(t)=R\cos t$.

$dL=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=R\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=Rdt$.

На всьому колі параметр $t$ змінюється від $0$ до $2\pi$. Тому

$$L=\int\limits_0^{2\pi}Rdt=Rt\Big|_0^{2\pi}=R(2\pi-0)=2\pi R.$$

Ще більш простим буде розв'язування цієї задачі, якщо рівняння кола задати у полярних координатах. Покладемо $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Рівняння кола: $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=R^2$, $\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=R^2$, тобто $\rho^2=R^2$, звідки $\rho=R$.

Полярна вісь співпадає з додатнім напрямком осі $Ox$, а полярний кут $\varphi$, коли точка пробігає все коло, змінюється від $0$ до $2\pi$. За формулою (3.10):

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{R^2+(R')^2}\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}Rd\varphi=R\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

2. Знайти довжину ***ланцюгової лінії*** $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ між точками з абсцисами $x_1=0$ і $x_2=1$.

***Розв'язання***

Знайдемо $y' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, тоді

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}\right) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2.$$

Обчислимо: $dL = \sqrt{1 + y'^2}dx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)dx$. За формулою (3.7):

$$L = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left(e^0 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

3. Знайти довжину дуги лінії $x = -\ln\cos y$ від точки $y = 0$ до $y = \frac{\pi}{3}$.

***Розв'язання***

Застосуємо формулу (3.8):

$x' = -\frac{1}{\cos y} \cdot \left(-\sin y\right) = tg\, y$, тоді $dL = \sqrt{1 + x'^2}dy = \sqrt{1 + tg^2 y}\, dy = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}}\, dy =$

$= \frac{1}{\cos y}\, dy$.

Отже, $L = \int_0^{\pi/3} \frac{dy}{\cos y} = \ln\left|tg\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \Big|_0^{\pi/3} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right| = \ln\left|tg\frac{5\pi}{12}\right| - \ln 1 =$

$= \ln tg\frac{5\pi}{12}$.

(Модуль знято тому, що $\frac{5\pi}{12}$ - кут першої чверті і $tg\frac{5\pi}{12} > 0$).

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від точки $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

***Розв'язання***

Застосуємо формулу (3.7): $y = x^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Тоді $dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$.

Отримаємо:

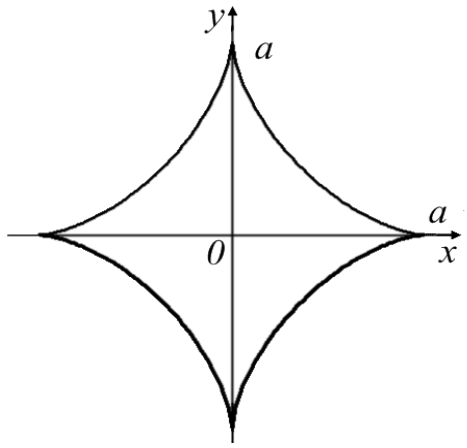
$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}-\sqrt{1^3}\right)=$$

$$=\frac{8}{24}\left(\frac{\sqrt{2197}}{8}-1\right)=\frac{\sqrt{2197}}{27}-\frac{8}{27}.$$

5. Знайти довжину ***астроїди*** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

***Розв'язання***

Наведемо вигляд цієї кривої.




Користуючись симетрією, обчислимо довжину дуги, що розташована у першій чверті. Вона становитиме чверть від всієї довжини дуги.

З рівняння дістанемо: $y^{2/3}=a^{2/3}-x^{2/3}$.

Піднесемо обидві частини рівності до степеня $\frac{3}{2}$. Отримаємо:

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Тоді $y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=-x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}{x^{1/3}}$.

Обчислимо

$$dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\sqrt{1+\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}-1}\,dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx.$$

Маємо: $\frac{L}{4}=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_0^a=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=\frac{3}{2}a^{\frac{3}{3}}=\frac{3}{2}a$.

Тоді $L=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$.

6. Знайти довжину однієї арки циклоїди $\begin{cases}x=a(t-sint)\\ y=a(1-cost)\end{cases}$.

***Розв'язання***

Згадаємо приклад 9 попереднього параграфа: параметр $t$ кривої змінюється від $0$ до $2\pi$.

Застосуємо формулу (3.9): $x'(t)=a(1-cost)$, $y'(t)=a\,sin\,t$.

Обчислимо

$$dL=\sqrt{a^2(1-cost)^2+a^2\,sin^2\,t}\;dt=\sqrt{a^2\left(1-2cost+cos^2\,t+sin^2\,t\right)}dt=$$

$$=\sqrt{a^2(2-2cost)}\,dt=\sqrt{2a^2(1-cost)}\,dt=\sqrt{2a^2\cdot 2\,sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\,sin\frac{t}{2}dt.$$

Тоді $L=\int_0^{2\pi}2a\,sin\frac{t}{2}dt=-2a\cdot 2cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(cos\pi-cos0)=-4a\cdot(-2)=8a$.

Тобто довжина однієї арки циклоїди у вісім разів більше радіуса кола, яке її утворює.

7. Знайти довжину дуги кривої $x=e^t\,cost$, $y=e^t\,sint$ від $t=0$ до $t=ln\pi$.

***Розв'язання***

Знайдемо $dL$: $x'(t)=e^t\,cost+e^t\cdot(-sint)=e^t(cost-sint)$,

$$y'(t)=e^t\,sint+e^t\,cost=e^t(sint+cost).$$

Тоді $dL=\sqrt{\left[e^t(cos\,t-sin\,t)\right]^2+\left[e^t(sin\,t+cos\,t)\right]^2}\;dt=$

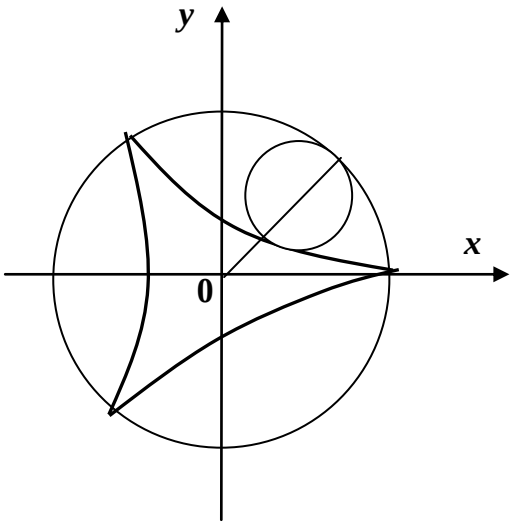
$$=\sqrt{e^{2t}\left(cos^2\,t-2\,cos\,t\,sin\,t+sin^2\,t+sin^2\,t+2\,sin\,t\,cos\,t+cos^2\,t\right)}dt=$$

$$=e^t\sqrt{1+1}dt=\sqrt{2}e^t dt.$$

Тоді $L=\int\limits_0^{ln\pi}\sqrt{2}e^t dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^{ln\pi}=\sqrt{2}\left(e^{ln\pi}-e^0\right)=\sqrt{2}(\pi-1)$.

8. Визначити довжину всієї ***кривої Штейнера*** $\begin{cases} x=2R\cos t/3+R\cos 2t/3 \\ y=2R\sin t/3-R\sin 2t/3 \end{cases}$.

***Розв'язання***




Якщо $0\le t\le 2\pi$, рухоме коло описує третину всієї кривої. Знайдемо $dL$:

$$x_t'=2R\cdot\left(-\frac{1}{3}\sin\frac{t}{3}\right)-\frac{2}{3}R\sin\frac{2t}{3},$$

$$y_t'=2R\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}-\frac{2}{3}R\cos\frac{2t}{3}.$$

Будемо мати:

$$dL=\sqrt{\frac{4}{9}R^2\left(-\sin\frac{t}{3}-\sin\frac{2t}{3}\right)^2+\frac{4}{9}R^2\left(\cos\frac{t}{3}-\cos\frac{2t}{3}\right)^2}dt=$$

$$=\frac{2}{3}R\sqrt{\sin^2\frac{t}{3}+2\sin\frac{t}{3}\sin\frac{2t}{3}+\sin^2\frac{2t}{3}+\cos^2\frac{t}{3}-2\cos\frac{t}{3}\cos\frac{2t}{3}+\cos^2\frac{2t}{3}}\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}R\sqrt{2-2\left(\cos\frac{t}{3}\cos\frac{2t}{3}-\sin\frac{t}{3}\sin\frac{2t}{3}\right)}dt=\frac{2}{3}R\sqrt{2(1-\cos t)}dt=\frac{2}{3}R\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2}dt.$$

Маємо:

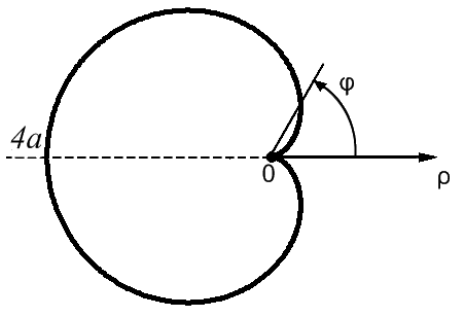
$$\frac{L}{3}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2}dt=-\frac{4}{3}R\cos\frac{t}{2}\cdot 2\Big|_0^{2\pi}=-\frac{8}{3}R(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{8}{3}R\cdot(-2)=\frac{16}{3}R.$$

Отже, $L=3\cdot\frac{16}{3}R=16R$.

9. Знайти довжину кардіоїди $\rho=2a(1-\cos\varphi)$.

***Розв'язання***

Наведемо вигляд цієї кривої.



Для використання формули (3.10) обчислимо $\rho'(\varphi)$ та

$$dL=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi.$$

Маємо: $\rho'(\varphi)=2a\sin\varphi,\ \rho'^2=4a^2\sin^2\varphi,$

тоді $dL=\sqrt{4a^2(1-\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$

$$=\sqrt{4a^2\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}\,d\varphi=2a\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=2a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

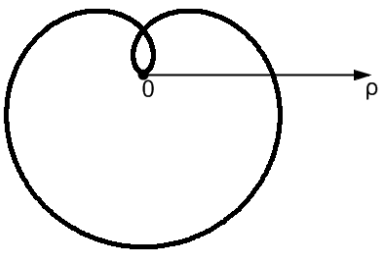
$$=2a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

У той час, коли точка на кардіоїді пробігає всю криву, її полярний кут змінюється від $0$ до $2\pi$.

$$L=\int_0^{2\pi}4a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-4a\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}=-8a(\cos 2\pi-\cos 0)=16a.$$

10. Знайти довжину дуги кривої $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

***Розв'язання***




Довжину дуги обчислимо за формулою (3.10). Для цього знайдемо диференціал дуги $dL$.

Маємо: $\rho'=a\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3}=$

$$=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Тоді $dL=\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=$

$$=a\sqrt{\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)}\,d\varphi=a\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi.$$

Визначимо, як змінюється полярний кут, коли точка, що рухається по кривій, пробігає її всю. Нехай $\rho=0$, тоді $\sin\frac{\varphi}{3}=0$, звідки

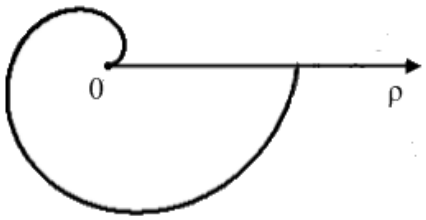
$$\frac{\varphi}{3}=\pi n\quad\Rightarrow\quad\varphi=3\pi n.$$

При $n=0$ $\varphi=0$, при $n=1$ $\varphi=3\pi$.

Отже, $L=\int\limits_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} =$

$=\frac{a}{2}\left(3\pi-\frac{3}{2}\sin 2\pi\right)-0=\frac{3}{2}\pi a$.

11. Знайти довжину дуги першого витка ***спіралі Архімеда*** $\rho = a\varphi$.




***Розв'язання***

Обчислимо $dL$: $\rho' = a$, тоді $dL=$

$=\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi = a\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi$, де $0\le\varphi\le 2\pi$.

Тоді $L=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$.

Обчислимо інтеграл: $I=\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \left|\begin{matrix} u=\sqrt{1+\varphi^2}, & du=\frac{\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \\ dv=d\varphi, & v=\varphi \end{matrix}\right| =$

$=\varphi\sqrt{1+\varphi^2}-\int\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = \varphi\sqrt{1+\varphi^2}-\int\left(\frac{\varphi^2+1}{\sqrt{1+\varphi^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right)d\varphi = \varphi\sqrt{1+\varphi^2}-$

$-\int\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = \varphi\sqrt{1+\varphi^2}-I+\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|$.

Тобто отримали: $2I=\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|$, звідки

$$I=\frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|\right).$$

Маємо:

$L=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\right.$

$\left.+\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|\right)$.

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити довжини дуг ліній:

1. $y = e^x$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 2$;

2. $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$;

3. $y^2 = 4x$, $0 \le x \le 1{,}5$;

4. $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t, \end{cases}$ від $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$;

5. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}$;

6. $\rho = 1 + \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

7. $\rho = 5\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

## 3.3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Нехай функція $y = f(x)$ - неперервна і додатна на відрізку $[a;b]$.

Об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі $Ox$ криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ та відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис.3.6), дорівнює

$$V_{ox} = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad \textbf{(3.11)}$$

Якщо задані дві неперервні криві $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ такі, що $f_1(x) > 0$, $f_2(x) \ge f_1(x)$ при $a \le x \le b$, то об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі $Ox$ плоскої фігури, обмеженої цими лініями та відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (рис.3.7), обчислюється за формулою

$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx. \qquad \textbf{(3.12)}$$

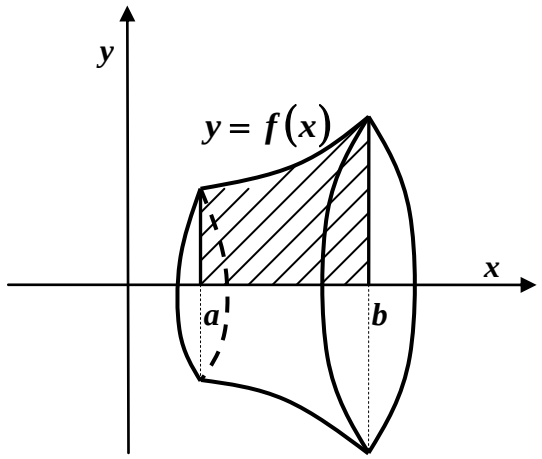



**Рис. 3.6**

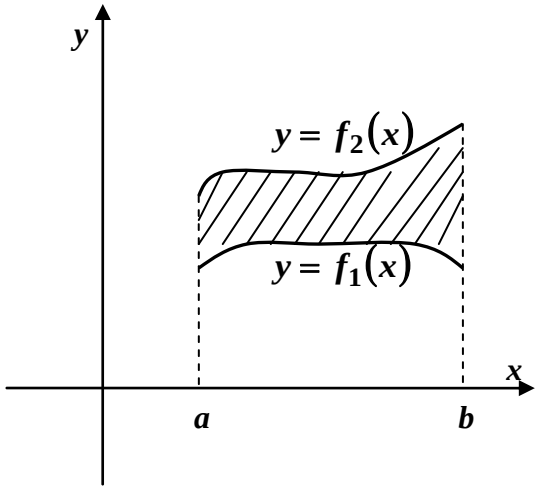



**Рис. 3.7**

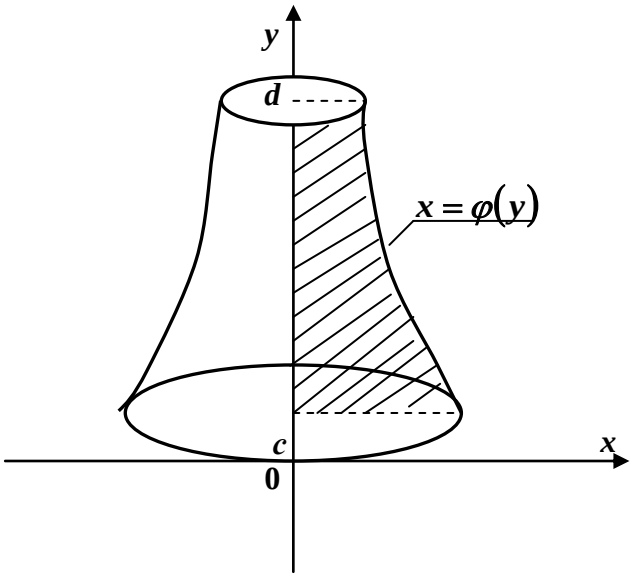



**Рис. 3.8**

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ***Oy*** криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $x = \varphi(y)$, прямою $x = 0$ та відрізками прямих $y = c$, $y = d$ (рис.3.8), дорівнює

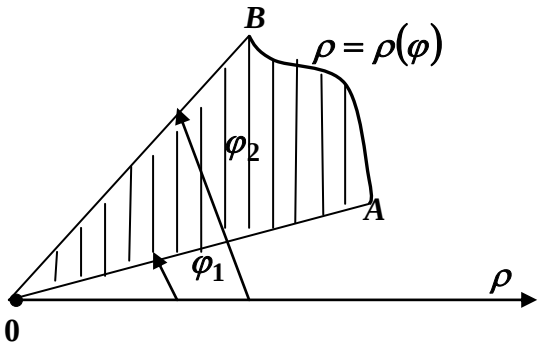
$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad \textbf{(3.13)}$$

У разі ***параметричного задання*** кривої рівняннями $x = x(t), y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$, об'єми утворених тіл обертання навколо осі ***Ox*** або осі ***Oy*** визначаються відповідно формулами:

$$V_{ox} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t)dt, \qquad \textbf{(3.14)}$$

$$V_{oy} = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \cdot y'(t)dt.$$

**(3.15)**




Нехай крива задана в ***полярній системі координат*** рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ -

неперервна функція при $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$. Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі плоскої фігури, обмеженої кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та двома полярними радіусами $OA$ і $OB$, які відповідають кутам $\varphi_1$ та $\varphi_2$ (рис.3.9), обчислюється за формулою

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi)\cdot \sin\varphi\, d\varphi . \qquad \textbf{(3.16)}$$

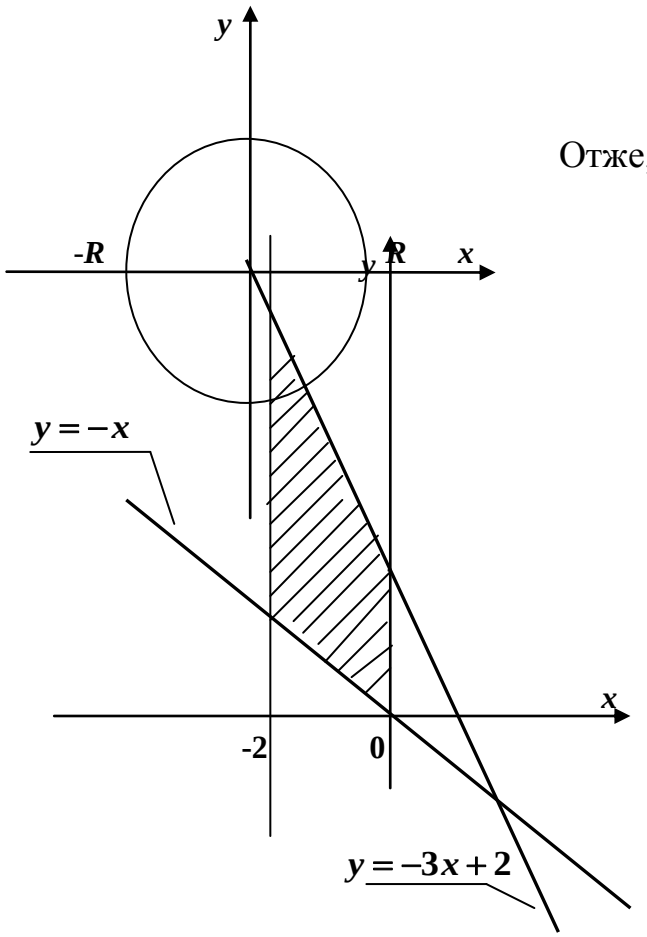
### *Зразки розв'язування задач*

1. Знайти об'єм кулі.

### *Розв'язання*

Нехай куля утворена обертанням навколо осі $Ox$ кола $x^2 + y^2 = R^2$. Звідки $y^2 = R^2 - x^2$.

Для обчислення використаємо формулу (3.11), враховуючи, що $-R \le x \le R$.




Отже, $V_{ox} = \pi\int_{-R}^{R} y^2 dx = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx =$

$$= \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^2\cdot R - \frac{R^3}{3}\right) -$$

$$-\left(R^2(-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right) = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) =$$

$= \frac{4}{3}\pi R^3$ куб. од.

2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $Ox$ фігури, обмеженої лініями $y = -3x + 2$, $y = -x$, $x = -2$, $x = 0$.

***Розв'язання***

Скористаємось формулою (3.12):

$$V_{ox} = \pi \int_{-2}^{0} \left[ (-3x+2)^2 - (-x)^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} \left( 9x^2 - 12x + 4 - x^2 \right) dx =$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} \left( 8x^2 - 12x + 4 \right) dx = 4\pi \int_{-2}^{0} \left( 2x^2 - 3x + \right.$$

$$\left. + 1 \right) dx = 4\pi \left( 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-2}^{0} = 4\pi \left[ 0 - \left( -2 \cdot \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{4}{2} - 2 \right) \right] = 4\pi \cdot \frac{40}{3} =$$

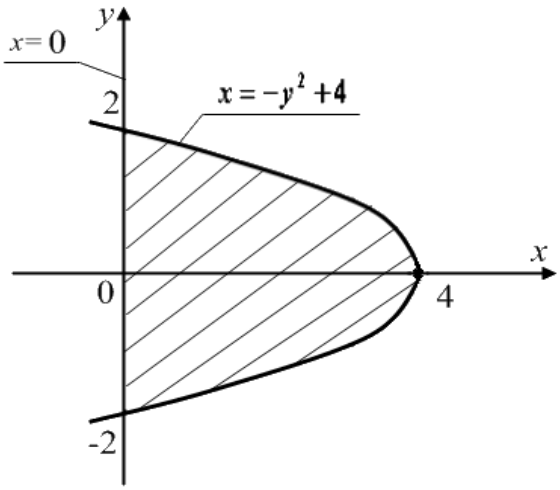
$= \frac{160}{3} \pi$ куб. од.

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $Oy$ фігури, обмеженої лініями $y^2 + x - 4 = 0$ та $x = 0$.

***Розв'язання***

Рівняння $y^2 + x - 4 = 0$ задає параболу з вершиною в точці $(4;0)$, віссю симетрії якої є вісь $Ox$.

Щоб знайти межі інтегрування, шукаємо ординати точок перетину ліній: $\begin{cases} x = -y^2 + 4 \\ x = 0 \end{cases}$, тоді $-y^2 + 4 = 0$, звідки $y^2 = 4$, $y = \pm 2$.




Зважаючи на симетрію тіла відносно осі $0x$, за формулою (3.13) маємо:

$$V_{oy} = 2\pi \int_{0}^{2} x^2 dy = 2\pi \int_{0}^{2} \left( 4 - y^2 \right)^2 dy =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2} \left( 16 - 8y^2 + y^4 \right) dy =$$

$$= 2\pi \left( 16y - 8 \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_{0}^{2} =$$

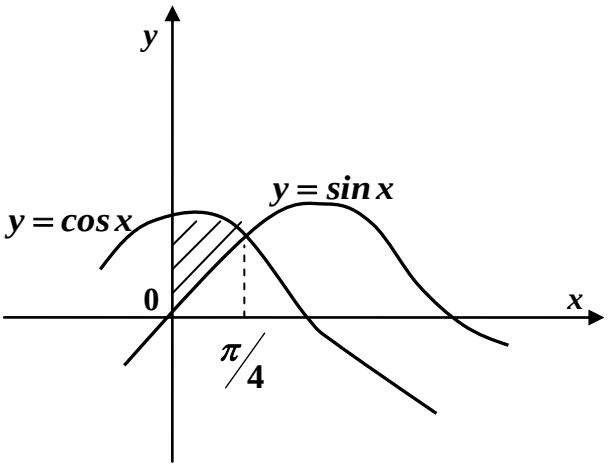
$$= 2\pi\left(32 - 8\cdot\frac{8}{3} + \frac{35}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi \text{ куб. од.}$$

В завданнях 4 – 7 обчислити об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі $0x$ фігури, обмеженої заданими лініями.

4. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$.

***Розв'язання***

Знайдемо межі інтегрування: $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \sin x \end{cases}$, тоді $\cos x = \sin x$, тоді $tgx = 1$, звідки $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. При $n = 0$ маємо $x = \frac{\pi}{4}$.




За формулою (3.12):

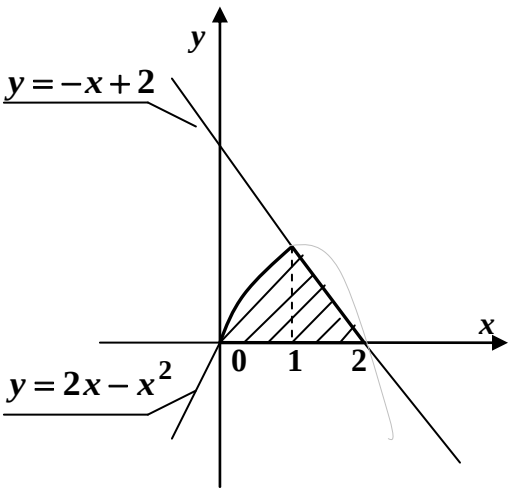
$$V_{ox} = \pi\int_0^{\pi/4}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx =$$

$$\pi\int_0^{\pi/4}\cos 2x dx = \pi\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{\pi}{2} \text{ куб. од.}$$

5. $y = 2x - x^2$, $x + y - 2 = 0$, $y \geq 0$.

***Розв'язання***




Зобразимо фігуру, при обертанні якої утворюється шукане тіло.

Знайдемо точки перетину графіків функцій $y = 2x - x^2$ та $x + y - 2 = 0$.

$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$, звідки $2x - x^2 = -x + 2$, $x^2 - 3x + 2 = 0$. Знайдемо $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Наша парабола $y = 2x - x^2$ перетинає вісь $0x$ в точках $x = 0$ та $x = 2$. Так як на відрізках $[0;1]$ та $[1;2]$ фігура обмежена різними лініями, то об'єм тіла знайдемо як суму об'ємів $V_1 + V_2$, де

$$V_1 = \pi\int_0^1 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(4\frac{x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi,$$

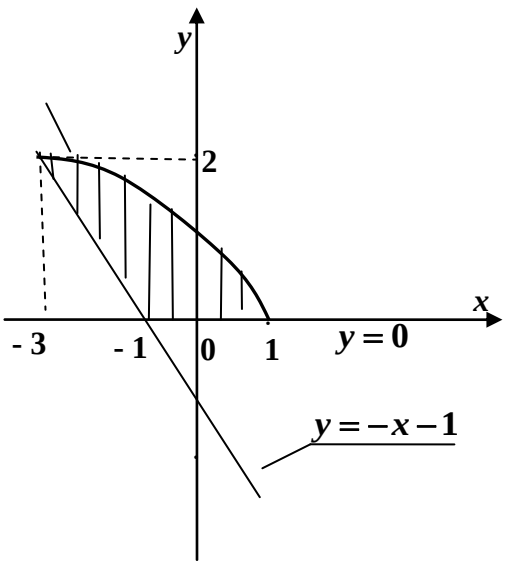
$$V_2 = \pi\int_1^2 (2-x)^2 dx = -\pi \cdot \frac{(2-x)^3}{3}\Bigg|_1^2 = -\frac{\pi}{3}\left[\frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(2-1)^3}{3}\right] = \frac{\pi}{3}.$$

Тоді $V = V_1 + V_2 = \frac{8}{15}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{13}{15}\pi$ куб. од.

6. $y = \sqrt{1-x}$, $x + y + 1 = 0$, $y = 0$.

***Розв'язання***

Побудуємо вітку параболи $y = \sqrt{1-x}$ та пряму $x + y + 1 = 0$. Вони перетинаються в точці:




$\begin{cases} y = \sqrt{1-x} \\ y = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = 2.$

Пряма $y = -x - 1$ перетинає вісь $0x$ в точці $(-1;0)$.

Вітка параболи з віссю $0x$ має спільну точку $x = 1$.

Знайдемо об'єм тіла як різницю між об'ємами $V_1$ - об'ємом тіла, утвореного обертанням гілки параболи, та $V_2$ - об'ємом конуса, утвореного обертанням прямої.

Маємо: $V = V_1 - V_2 = \pi \int\limits_{-3}^{1} \left(\sqrt{1-x}\right)^2 dx - \pi \int\limits_{-3}^{-1} (-1-x)^2 dx = \pi \int\limits_{-3}^{1} (1-x) dx -$

$$-\pi \int\limits_{-3}^{-1} \left(1+2x+x^2\right) dx = \pi \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{1} - \pi \left( x + 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-3}^{-1} = \pi \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(-3 - \frac{9}{2}\right) \right] -$$

$$-\pi \left[ \left(-1+1-\frac{1}{3}\right) - (-3+9-9) \right] = 8\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi \quad \text{куб. од.}$$

7. $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \sin 2t, \qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

***Розв'язання***

Для обчислення об'єму скористаємось формулою (3.14). Знайдемо $x'(t) = a \cos t$. Тоді

$$V_{ox} = \pi \int\limits_0^{\pi/2} b^2 \sin^2 2t \cdot a \cos t dt = ab^2 \pi \int\limits_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \cos^2 t \cos t dt = 4ab^2 \pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t \left(1 - \sin^2 t\right) \cdot$$

$$\cdot \cos t dt = 4\pi ab^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t - \sin^4 t\right) \cos t dt = \left| \begin{array}{ll} \sin t = z, & \text{при } t = 0 \quad z = 0, \\ \cos t dt = dz, & \text{при } t = \dfrac{\pi}{2} \quad z = 1 \end{array} \right| =$$

$$= 4\pi ab^2 \int\limits_0^1 \left(z^2 - z^4\right) dz = 4\pi ab^2 \left( \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = 4\pi ab^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} \pi ab^2 \quad \text{куб. од.}$$

8. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

***Розв'язання***

Знайдемо $x'(t) = a(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi$.

Тоді $V_{ox} = \pi \int\limits_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t)\right) dt -$$

$$- \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt .$$

Обчислимо останній інтеграл:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos t dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right) \cos t dt = \left| \begin{array}{ll} \sin t = z, & \text{при } t = 0 \quad z = 0 \\ \cos t dt = dz, & \text{при } t = 2\pi \quad z = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^0 \left(1 - z^2\right) dz = 0 .$$

Отже,

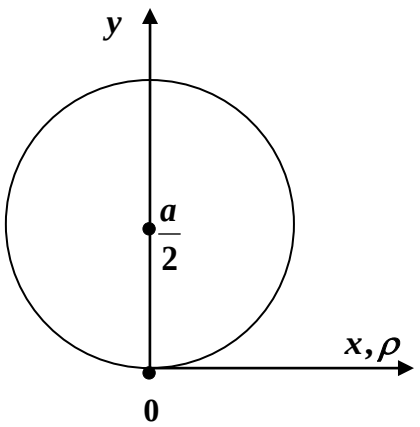
$$V_{ox} = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 3\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 3\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t\right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi a^3 \left(\frac{5}{2} \cdot 2\pi - 3\sin 2\pi + \frac{3}{4}\sin 4\pi\right) -$$

$$- \pi a^3 \left(\frac{5}{2} \cdot 0 - 3\sin 0 + \frac{3}{4}\sin 0\right) = \pi a^3 \cdot 5\pi = 5\pi^2 a^3 \text{ куб. од.}$$

9. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертанням кривої $\rho = a\sin\varphi$ навколо полярної осі.

***Розв’язання***




Рівняння $\rho = a\sin\varphi$ задає коло діаметра $a$ з центром у точці $\left(0; \frac{a}{2}\right)$. Зрозуміло, що $0 \le \varphi \le \pi$.

Для обчислення об’єму використаємо формулу (3.16). Будемо мати:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} a^3 \sin^3 \varphi \cdot \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{2\pi}{3} a^3 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi +\right.$$

$$\left. + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{6} a^3 \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{6} a^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{6} a^3 \left(\frac{3}{2}\varphi - 2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right) \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{6} a^3 \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi^2}{4} a^3 \text{ куб. од.}$$

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням плоских фігур навколо координатних осей:

1. $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 2$, $V_{ox} - ?$

2. $y = x^2 - 4x$, $y = -x$, $V_{ox} - ?$

3. $xy = 6$, $y = 7 - x$, $V_{oy} - ?$

4. $y^2 = 9x$, $y = 3x$, $V_{ox} - ?$

5. $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \quad 0 \le t \le \sqrt{3}, \ V_{ox} - ? \end{cases}$

6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $\rho = a(1 + cos\varphi)$ навколо полярної осі $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

## 3.4. Обчислення площі поверхні тіл обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі $Ox$ дуги гладкої кривої, заданої функцією $y = f(x)$, $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$P_{ox} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad \textbf{(3.17)}$$

Якщо гладка крива задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, то площа поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі $Oy$, може бути обчислена за формулою

$$P_{oy} = 2\pi\int_c^d |\varphi(y)|\sqrt{1+\left[\varphi'(x)\right]^2}\,dy. \qquad \textbf{(3.18)}$$

У разі ***параметричного задання*** кривої рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, де функції $x(t)$, $y(t)$ - неперервні разом із своїми похідними, відповідні площі поверхні обчислюються за формулами:

$$P_{ox} = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt, \qquad \textbf{(3.19)}$$

$$P_{oy} = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt. \qquad \textbf{(3.20)}$$

Площа поверхні, отриманої обертанням навколо ***полярної осі*** криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та двома полярними радіусами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, визначається за формулою

$$P = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,\sin\varphi\, d\varphi. \qquad \textbf{(3.21)}$$

### *Зразки розв'язування задач*

1. Знайти площу поверхні сфери, як тіла обертання.

### *Розв'язання*

Нехай сфера утворена обертанням кола $x^2 + y^2 = R^2$ навколо осі $Ox$. Знайдемо $y'(x)$:

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (верхня половина кола), тоді $y'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\cdot 2x =$

$= -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Обчислимо $1+\left[y'(x)\right]^2 = 1+\dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$, тоді

$dl = \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx$.

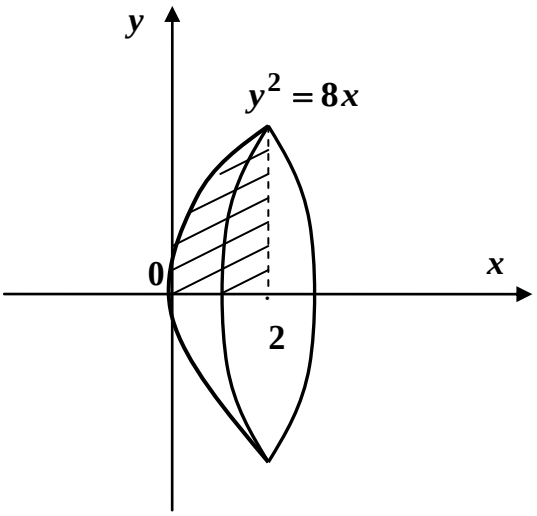
Отже, за формулою (3.17):

$$P_{ox} = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = 2\pi\int_{-R}^{R} R\,dx = 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R(R+R) = 4\pi R^2.$$

Площа поверхні сфери дорівнює $4\pi R^2$.

2. Знайти бічну поверхню параболоїда, утвореного обертанням параболи $y^2 = 8x$ навколо осі $0x$ на відрізку $[0;2]$.

***Розв'язання***




Якщо $y^2 = 8x$, то $y = \pm\sqrt{8x}$.

Так як вітки параболи симетричні відносно осі $0x$, будемо вважати, що тіло утворено обертанням верхньої вітки, рівняння якої $y = \sqrt{8x}$. Отже, $y' = \frac{1}{2\sqrt{8x}} \cdot 8 = \frac{4}{\sqrt{8x}} = \frac{4}{2\sqrt{2x}} = \frac{2}{\sqrt{2x}}$. Тоді $1 + \left[y'(x)\right]^2 = 1 + \frac{4}{2x} = \frac{2x+4}{2x} = \frac{x+2}{x}$.

Тепер $|y|\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2} = 2\sqrt{8x} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{\frac{8x^2+16x}{x}} = \sqrt{8x+16} = 2\sqrt{2x+4}$.

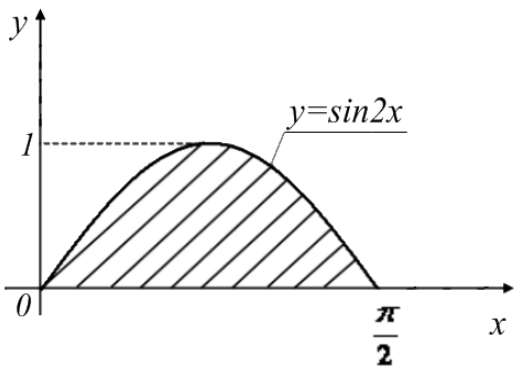
Маємо: $P_{ox} = 2\pi\int_0^2 2\sqrt{2x+4}\,dx = 4\pi\int_0^2 \sqrt{2x+4}\,dx = 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+4)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 =$

$= 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(2x+4)^3}\Big|_0^2 = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{(4+4)^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{8^3} - 2^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(2\sqrt{2}\right)^3 - 8\right) =$

$= \frac{4\pi}{3}\left(16\sqrt{2} - 8\right)$ кв. од.

3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі $0x$ дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

***Розв'язання***




Скористуємось формулою (3.17). Спочатку знайдемо $y' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, тоді $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+4\cos^2 2x}$.

Отже, $P_{ox} = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\, dx =$

$$= \left| \begin{array}{lll} 2\cos 2x = t, & \text{при } x = 0 & t = 2 \\ -4\sin 2x dx = dt, & \text{при } x = \pi/2 & t = -2 \\ \sin 2x dx = -\frac{1}{4} dt, & & \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

Позначимо $\int \sqrt{1+t^2}\, dt = I$ та обчислимо його частинами. Будемо мати:

$$I = \int \sqrt{1+t^2}\, dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+t^2}, & du = \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} \\ dv = dt, & v = t \end{array} \right| = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = t\sqrt{1+t^2} -$$

$$- \int \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{1+t^2}} dt = t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} dt = t\sqrt{1+t^2} - I + \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|.$$

Звідки $2I = t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|$, тому $I = \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|$.

Повернемося до обчислення площі поверхні:

$$P_{ox} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right]\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{5} + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(-2+\sqrt{5}\right)\right] =$$

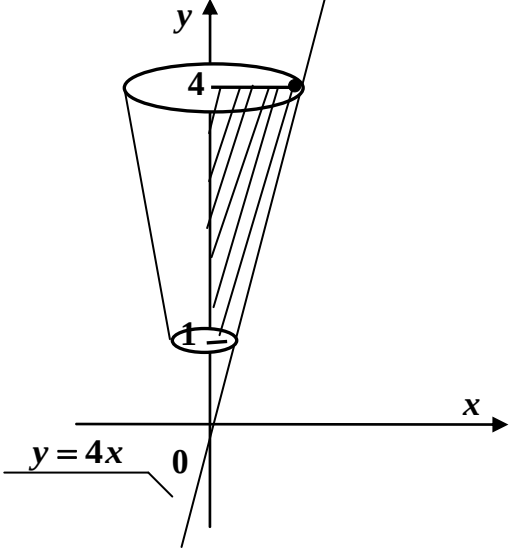
$$= \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right] = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}{5-4}\right] = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right] \text{ кв. од.}$$

4. Знайти площу поверхні, отриманої обертанням прямої $y = 4x$ навколо осі $0y$ від $y = 1$ до $y = 4$.

***Розв'язання***

Виразимо $x$: $x = \frac{y}{4}$. Скористаємось формулою (3.18), для цього знайдемо $x' = \frac{1}{4}$, тоді $\sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.




Отримаємо:

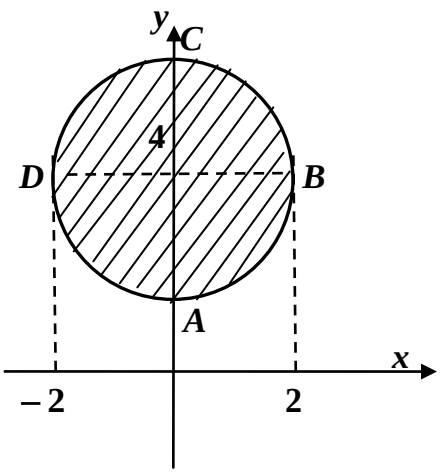
$$P_{oy} = 2\pi\int_1^4 \frac{y}{4}\frac{\sqrt{17}}{4}dy =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\sqrt{17}}{16}\int_1^4 ydy = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{17}}{16}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{\sqrt{17}\pi}{16}(16-1) = \frac{15\sqrt{17}\pi}{16} \text{ кв. од.}$$

5. Обчислити поверхню тора, утвореного обертанням кола $x^2+(y-4)^2=4$ навколо осі $0x$.

***Розв'язання***




Поверхня тора дорівнює сумі поверхонь, утворених обертанням дуг $BCD$ та $BAD$ навколо осі $0x$. Щоб скористатися формулою (3.17), розв'яжемо рівняння кола відносно $y$. Маємо: $(y-4)^2 = 4-x^2$, звідки $y-4=\pm\sqrt{4-x^2}$, $y=4\pm\sqrt{4-x^2}$.

Для дуги $BCD$: $y=4+\sqrt{4-x^2}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

$y'^2 = \frac{x^2}{4-x^2}$.

Обчислимо $1+y'^2 = 1+\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4-x^2+x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$, $\sqrt{1+y'^2} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.

Для дуги $BAD$: $y=4-\sqrt{4-x^2}$, $y' = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $\sqrt{1+y'^2} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.

Отже, $P_{ox} = P_{BCD} + P_{BAD} = 2\pi \int\limits_{-2}^{2} \left(4 + \sqrt{4 - x^2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx +$

$+ 2\pi \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$

Відрізок інтегрування симетричний, тобто

$$P_{ox} = 2\left[2\pi \int\limits_{0}^{2} \left(4 + \sqrt{4 - x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx + 2\pi \int\limits_{0}^{2} \left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\right] dx =$$

$$= 4\pi \int\limits_{0}^{2} \left[\left(4 + \sqrt{4 - x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} + \left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\right] dx =$$

$$= 8\pi \int\limits_{0}^{2} \left(4 + \sqrt{4 - x^2} + 4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 8\pi \int\limits_{0}^{2} 8 \cdot \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} =$$

$$= 64\pi \cdot arcsin \frac{x}{2} \Big|_{0}^{2} = 64\pi (arcsin 1 - arcsin 0) = 64\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 32\pi^2 \text{ кв. од.}$$

6. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі $0x$ кривої

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right), \qquad 0 \le t \le \sqrt{3}. \end{cases}$$

***Розв'язання***

Застосуємо формулу (3.19), для цього знайдемо $x_t' = 2t$, $y_t' = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)' = 1 - t^2$.

Обчислимо $\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = 4t^2 + \left(1 - t^2\right)^{2} = 4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4 = t^4 + 2t^2 + 1 =$

$= \left(1 + t^2\right)^2.$

Тоді отримаємо:

$$P_{ox} = 2\pi \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)\sqrt{\left(1 + t^2\right)^2}\, dt = 2\pi \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)\left(1 + t^2\right) dt = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \left(3t + 2t^3 - t^5\right) dt =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(3\frac{t^2}{2} + 2\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{6} \cdot 27\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3\pi \text{ кв. од.}$$

7. Знайти поверхню тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - sin\, t) \\ y = a(1 - cos\, t), \qquad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ навколо осі $Ox$.

***Розв'язання***

Використовуючи формулу (3.19), обчислимо спочатку $x' = a(1-cost)$, $y' = a\,sint$.

Тоді $x'^2 + y'^2 = a^2(1-cost)^2 + a^2 sin^2 t = a^2\left(1-2cost+cos^2 t+sin^2 t\right)=$
$= a^2(2-2cost) = 2a^2(1-cost)$.

Отже, $P_{ox} = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} a(1-cost)\cdot\sqrt{2a^2(1-cost)}dt = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} a^2\sqrt{2(1-cost)^3}\,dt =$

$$= 2\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot\left(2sin^2\frac{t}{2}\right)^3}\,dt = 2\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{16sin^6\frac{t}{2}}\,dt = 8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi} sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-cos^2\frac{t}{2}\right)sin\frac{t}{2}dt = \left|\begin{array}{ll} cos\,{}^{t}\!/_{2} = z, & \text{при } t=0 \quad z=1 \\ -{}^{1}\!/_{2}\,sin\,{}^{t}\!/_{2}\,dt = dz, & \text{при } t=2\pi \quad z=-1 \\ sin\,{}^{t}\!/_{2}\,dt = -2dz, & \end{array}\right| =$$

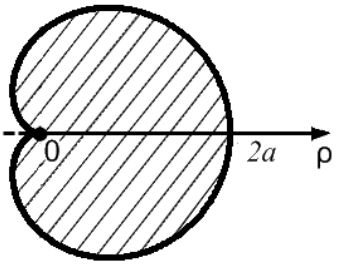
$$= 8\pi a^2\int\limits_1^{-1}\left(1-z^2\right)\cdot(-2)dz = 16\pi a^2\int\limits_1^{-1}\left(1-z^2\right)dz = 16\pi a^2\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 16\pi a^2\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 16\pi a^2\cdot\frac{4}{3} = \frac{64}{3}\pi a^2 \text{ кв. од.}$$

8. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $\rho = a(1+cos\varphi)$ навколо полярної осі.

***Розв'язання***

Використаємо формулу (3.21), для цього знайдемо:




$$\rho' = -a\,sin\varphi,$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+cos\varphi)^2 + a^2 sin^2\varphi =$$
$$= a^2\left(1+2cos\varphi+cos^2\varphi+sin^2\varphi\right) =$$
$$= a^2(2+2cos\varphi) = 2a^2(1+cos\varphi).$$

$$P = 2\pi\int\limits_0^{\pi} a(1+cos\varphi)\sqrt{2a^2(1+cos\varphi)}\,sin\varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\varphi)^3}\,\sin\varphi d\varphi =$$

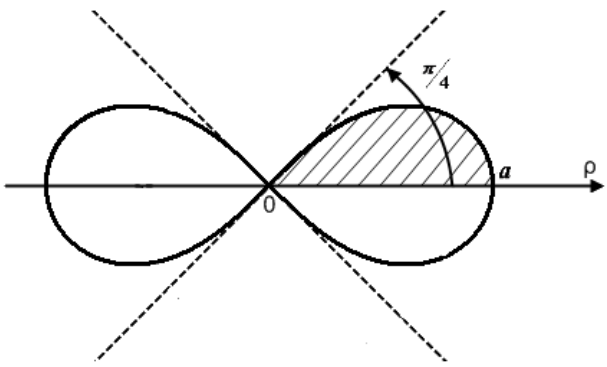
$$= \left| \begin{array}{ll} 1+\cos\varphi = z, & \text{при } \varphi = 0 \quad z = 2 \\ -\sin\varphi\, d\varphi = dz, & \text{при } \varphi = \pi \quad z = 0 \\ \sin\varphi\, d\varphi = -dz, & \end{array} \right| = -2\sqrt{2}\pi a^2 \int_2^0 \sqrt{z^3}\,dz = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^2 z^{3/2}\,dz =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \cdot \frac{z^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2 \sqrt{z^5}\Bigg|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2\left(\sqrt{32}-0\right) = \frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2 \cdot 4\sqrt{2} =$$

$$= \frac{32}{5}\pi a^2 \text{ кв.од.}$$

9. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням лемніскати $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ навколо полярної осі.

***Розв'язання***




Обчислимо половину шуканої площі поверхні, а саме:

$$\frac{P}{2} = 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\sin\varphi d\varphi .$$

Знайдемо з рівняння $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Тоді $\rho' = \dfrac{a}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot (-\sin 2\varphi) \cdot 2 = = -\dfrac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

Обчислимо $\rho^2 + \rho'^2 = a^2 \cos 2\varphi + \dfrac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \dfrac{a^2 \cos^2 2\varphi + a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} =$

$$= \frac{a^2\left(\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi\right)}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Тоді

$$\frac{P}{2} = 2\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \sin\varphi\, d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi = -2\pi a^2 \cos\varphi \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= -2\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2\pi a^2 - \pi a^2\sqrt{2}.$$

$P = 4\pi a^2 - 2\pi a^2\sqrt{2} = 2\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$ кв. од.

## Завдання для самостійної роботи

Обчислити площі поверхонь тіл, утворених обертанням кривих навколо відповідної осі:

1. $y = x^3, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad P_{ox} - ?$

2. $y = \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad P_{ox} - ?$

3. $y = \ln x, \quad y \in [0; \ln 2], \quad P_{oy} - ?$

4. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \sqrt{5}\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \quad P_{ox} - ?$

# Л І Т Е Р А Т У Р А


1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.
2. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн.. – К: Либідь, 1994.
5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.
6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.