МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ШОСТКИНСЬКИЙ ІНСТИТУТ Сум ДУ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Лекції, практичні, розв’язання прикладів, завдання для самостійної роботи

для студентів всіх спеціальностей освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» денної та заочної форм навчання

У шести частинах

Частина 5

З М І С Т

ВСТУП

Дуже важливою формою навчання студентів є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичних положень за підручником, розгляду прикладів та самостійного розв'язання задач, причому опанування теоретичного матеріалу є необхідною передумовою формування практичних навичок, але не завжди є цілком достатнім для цього. Вміння розв'язувати задачі формується виключно шляхом цілеспрямованої та копіткої самостійної роботи, в тому числі і над аналізом прикладів розв'язання задач, які наведені у підручниках та навчальних посібниках.

При самостійному розв'язанні задач часто виникають певні утруднення, які пов'язані або з вибором методу розв'язування задачі, або з суто технічними особливостями обраного методу. Побороти утруднення другого роду порівняно нескладно – треба лише систематично працювати, виконуючи всі завдання викладача, в тому числі й ті, які здаються дуже простими. Вибір методу розв'язування вимагає більш глибокого аналізу прикладів з метою встановлення закономірностей, яким підкоряється цей вибір.

Основне призначення цього навчального посібника – допомогти студентам технічних спеціальностей подолати ці складності та навчити їх свідомо застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач.

У п'ятій частині навчального посібника викладено матеріал з чотирьох розділів курсу вищої математики: «Числові ряди», «Степеневі ряди», «Застосування рядів» та «Ряди Фур'є». Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв'язанням великої кількості задач різного рівня складності з їх повним аналізом, в тому числі і щодо вибору методу розв'язування. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи, до яких наведені відповіді.

Автори сподіваються, що така побудова посібника надає студентові широкі можливості для активної самостійної роботи, яка, безумовно, сприятиме засвоєнню матеріалу при вивченні дисципліни «Вища математика».

Розділ 1
ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Знакододатні ряди

Якщо u_1 , u_2 ,... u_n ,...— нескінченна числова послідовність, то вираз

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається ***числовим рядом***, а величини u_1 , u_2 ,...— членами цього ряду.

Побудуємо допоміжну послідовність частинних сум ряду $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, ... S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, ...$. Якщо ця послідовність має скінчену границю S, то ряд називається ***збіжним***, а число S — ***сумою ряду***. У випадку, коли границя не існує або є нескінченною, ряд називається ***розбіжним***.

Якщо всі члени ряду є додатними, то ряд називається ***знакододатним***.

Необхідна умова збіжності числового ряду

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, то послідовність його членів прямує до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

Достатні умови збіжності знакододатних рядів

Ознака порівняння.

Якщо для членів знакододатних рядів справджується нерівність $u_n \le v_n$, та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також збігається.

Якщо для членів знакододатних рядів справджується нерівність $u_n \ge v_n$, та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є розбіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається.

Якщо для членів знакододатних рядів має місце умова $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=C\neq 0;\infty$,

то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Найчастіше для порівняння використовується ***узагальнений гармонічний ряд*** (або ***ряд Діріхле***) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Цей ряд збігається, якщо $p>1$, та розбігається у випадку $p\leq 1$.

Ознака Даламбера.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, якщо параметр $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ менший за **1,** та розбігається, якщо це число більше за **1.** У випадку $D=1$ поведінку ряду за допомогою ознаки Даламбера визначити неможливо.

Радикальна ознака Коші

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, якщо параметр $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ менший за **1,** та розбігається, якщо це число більше за **1.** У випадку $K=1$ поведінку ряду за допомогою радикальної ознаки Коші визначити неможливо.

Інтегральна ознака Коші

Нехай загальний член ряду задано рівністю $u_n=f(n)$, та функція $y=f(x)$ є додатною та спадною на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ та ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

При розв’язуванні задач доцільно обирати ознаку для дослідження, користуючись порадами, які наведені у вигляді таблиці.

Структура загального члена ряду	**Рекомендована ознака**
Неправильний алгебраїчний дріб	Необхідна умова збіжності
Правильний алгебраїчний дріб; функції $\mathbf{sin}$, tg, $\mathbf{arcsin}$, $arctg$, аргументами яких є правильний алгебраїчний дріб	Ознаки порівняння
$f(\ln n)\cdot n^k$, $k \neq -1$	Ознака порівняння за допомогою нерівності
Показникова функція; факторіал; факторіальний добуток; функції $\mathbf{sin}$, tg, $\mathbf{arcsin}$, $arctg$, нескінченно малі аргументи яких містять наведені вище елементи	Ознака Даламбера
Степенево-показникова функція; показникова функція	Радикальна ознака Коші
Будь-яка монотонно спадна функція, інтегрування якої не вимагає значних зусиль, наприклад: $\frac{f(\ln n)}{n}$; $\frac{f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$; $\frac{f(arctg\ n)}{1+n^2}$	Інтегральна ознака Коші

<u>Зауваження 1.</u> Теоретично дослідження збіжності будь-якого числового ряду повинно починатися з перевірки необхідної умови збіжності. Але ця процедура досить часто є нетривіальною і, що дуже важливо, не завжди надає можливість зробити остаточний висновок. Отже, ми будемо вважати за доцільне застосовувати необхідну ознаку у тих випадках, коли є обгрунтовані припущення щодо її ефективності.

<u>Зауваження 2.</u> Наведені поради не є обов’язковими, вони лише допомагають обрати один з можливих шляхів розв’язування стандартних задач. Більшість задач може бути розв’язана кількома методами.

Зразки розв'язання задач

Скласти формулу загального члена u_n та знайти u_{n+1} для заданого числового ряду:

1. $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{7}{75}+\ldots$

Члени ряду є дробами. Послідовність числівників $1,4,7,\ldots$ складає арифметичну прогресію з першим членом 1 та різницею 3, отже, задається з урахуванням формули загального члену арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$ як $1+3\cdot(n-1)$ = $3n-2$. Послідовність знаменників $3,15,75,\ldots$ складає геометричну прогресію з першим членом 3 та знаменником 5, отже, за формулою загального члену геометричної прогресії $b_n = b_1 q^{n-1}$ задається як $3\cdot 5^{n-1}$. Таким чином, загальний член ряду задається рівністю $u_n = \frac{3n-2}{3\cdot 5^{n-1}}$.

Умову, яка задає u_{n+1}, можна отримати з формули загального члена шляхом заміни змінної n на $n+1$, отже,

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{3\cdot 5^{(n+1)-1}} = \frac{3n+1}{3\cdot 5^n}.$$

2. $\frac{1!\cdot 1}{2}+\frac{3!\cdot 4}{2\cdot 5}+\frac{5!\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$

Члени ряду є дробами. Числівник дробу складається з двох множників, перший з яких є факторіалом члена арифметичної прогресії з першим членом 1 та різницею 2, отже, задається як $(2n-1)!$. Послідовність других множників $1,4,9,\ldots$ відповідає формулі n^2. Знаменник кожного з дробів є добутком попереднього знаменника та нового множника, який складає з існуючими арифметичну прогресію з першим членом 2 та різницею 3. Таким чином, послідовність нових множників відповідає формулі $3n-1$, а весь знаменник має вигляд $2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)$. Таку послідовність будемо надалі називати факторіальним добутком. Отже, формулою загального члена ряду є рівність

$$u_n = \frac{(2n-1)!\cdot n^2}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}.$$

Тоді $u_{n+1}=\dfrac{(2(n+1)-1)!\cdot(n+1)^2}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3(n+1)-1)}=\dfrac{(2n+1)!\cdot(n+1)^2}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}$.

<u>Зауваження.</u> Для факторіального добутку доцільно при побудові формули для u_{n+1} підкреслити наявність всіх множників, які відповідають попередньому члену ряду.

З'ясувати за допомогою означення, чи буде збіжним числовий ряд, та за умови позитивної відповіді знайти суму ряду.

3. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{98}+\ldots$.

Загальний член ряду задається формулою $u_n=\dfrac{1}{2\cdot7^{n-1}}$, отже, послідовність частинних сум має вигляд $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{98}+\ldots+\dfrac{1}{2\cdot7^{n-1}}$. Це сума n членів геометричної прогресії з першим членом $\dfrac{1}{2}$ та знаменником $\dfrac{1}{7}$, яка обчислюється за допомогою формули

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{12}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7}{12}\left(1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^n\right)=\dfrac{7}{12}$, отже, ряд збігається, а його сума $S=\dfrac{7}{12}$.

4. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{8}{2}+\dfrac{13}{2}+\ldots$.

Загальний член ряду задається формулою $u_n=\dfrac{5n-2}{2}$, отже, послідовність частинних сум має вигляд

$$S_n=\frac{3}{2}+\frac{8}{2}+\frac{13}{2}+\ldots+\frac{5n-2}{2}=\frac{1}{2}(3+8+13+\ldots+(5n-2)).$$

У дужках – сума n членів арифметичної прогресії з першим членом **3** та знаменником **5** , отже, $S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot 3 + 5(n-1)}{2}\cdot n\right) = \frac{5n^2 + n}{4}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+n}{4} = \infty$, тобто ряд є розбіжним.

5. $\frac{1}{2\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 18} + \frac{1}{18\cdot 26} + \ldots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n = \frac{1}{(8n-6)\cdot(8n+2)}$, отже, послідовність частинних сум має вигляд

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 18} + \frac{1}{18\cdot 26} + \ldots + \frac{1}{(8n-6)\cdot(8n+2)}.$$

Легко помітити, що

$$\frac{1}{2\cdot 10} = \frac{1}{8}\cdot\frac{10-2}{2\cdot 10} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right),$$

$$\frac{1}{10\cdot 18} = \frac{1}{8}\cdot\frac{18-10}{10\cdot 18} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{18}\right),$$

$$\frac{1}{18\cdot 26} = \frac{1}{8}\cdot\frac{26-18}{18\cdot 26} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{26}\right),\ldots$$

$$\frac{1}{(8n-6)\cdot(8n+2)} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8n-6} - \frac{1}{8n+2}\right).$$

Тоді $S_n = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{1}{26} + \ldots + \frac{1}{8n-6} - \frac{1}{8n+2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8n+2}\right)$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8n+2}\right) = \frac{1}{16}$, ряд є збіжним, а його сума $S = \frac{1}{16}$.

З'ясувати за допомогою ознак збіжності, чи буде збіжним числовий ряд.

6. $\frac{3}{2} + \frac{5}{12} + \frac{7}{22} + \ldots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n = \frac{2n+1}{10n-8}$. Це неправильна дробово-раціональна функція (степінь числівника не менший за степінь знаменника), отже, доцільно скористатися необхідною умовою збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{10n-8} = \frac{1}{5} \neq 0$. За необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n+1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$.

Степінь числівника 2 більший за степінь знаменника $\frac{4}{3}$, отже, доцільно скористатися необхідною умовою збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+1}{\sqrt[3]{n^4+5}} = \infty \neq 0$. Ряд розбігається.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\sqrt[3]{5n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\sqrt[3]{5n+1}$ не існує, отже, за необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{5n^2+7}$

Загальний член ряду є правильною дробово-раціональною функцією (степінь числівника менший за степінь знаменника), числівник еквівалентний величині $3n$, знаменник – $5n^2$, отже, $u_n \sim \frac{3n}{5n^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{n}$.

Порівняємо досліджуваний ряд з розбіжним гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{5n^2+7} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{5n^2+7} \cdot \frac{n}{1} = \frac{3}{5} \neq 0; \infty .$$

Згідно з граничною ознакою порівняння досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{5n^2+7}$ також є розбіжним.

10. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}$$

Скористаємося граничною ознакою порівняння . Оберемо допоміжний ряд.

$$\sqrt[3]{5n^2+1}\sim\sqrt[3]{5n^2}\sim\sqrt[3]{5}\cdot n^{\frac{2}{3}};$$
$$2n+7\sim 2n;$$
$$3n-1\sim 3n.$$

Таким чином, $u_n=\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}\sim\frac{\sqrt[3]{5n^2}}{2n\cdot 3n}=\frac{\sqrt[3]{5}}{6}\cdot\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

Порівняємо досліджуваний ряд з узагальненим гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$, який є збіжним, оскільки показник степеня $p=\frac{4}{3}>1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}:\frac{1}{n^{4/3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}\cdot\frac{n^{4/3}}{1}=\frac{\sqrt[3]{5}}{6}\neq 0;\infty.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}$ також збігається.

11. $$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}}$$

Загальний член ряду містить арксинус нескінченно малого аргументу, отже, за допомогою граничної ознаки порівняння можна щонайменше позбутися оберненої тригонометричної функції.

Скористаємося наслідком першої важливої границі $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ та оберемо ряд для порівняння.

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}.$$

Порівняємо досліджуваний ряд з узагальненим гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$, який є розбіжним, оскільки показник степеня $p=\frac{3}{4}<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}}:\frac{1}{n^{3/4}}=1\neq 0;\infty.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}}$ також розбігається.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n^2}$.

Скористаємося тим, що для досить великих значень змінної логарифм степеневої функції буде меншим за будь-який додатний степінь.

$$\ln(2n+1)<n^{1/2};$$

$$\frac{\ln(2n+1)}{n^2}<\frac{n^{1/2}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається, оскільки показник степеня $p=\frac{3}{2}>1$, отже, згідно з ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n^2}$ також буде збіжним.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^2+3)}{\sqrt[3]{n^2}}$

Скористаємося тим, що для досить великих значень змінної логарифм степеневої функції буде більшим за одиницю.

$$\ln(n^2+3)>1;$$

$$\frac{\ln(n^2+3)}{n^{2/3}}>\frac{1}{n^{2/3}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ розбігається, оскільки показник степеня $p=\frac{2}{3}<1$, отже, згідно з ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^2+3\right)}{\sqrt[3]{n^2}}$ також буде розбіжним.

<u>Зауваження.</u> Якщо логарифмічна функція розташована у знаменнику, для її оцінювання доцільно скористатися нерівністю $\frac{1}{n^p}<\frac{1}{\ln n}<1$.

14. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}$$

До загального члена ряду входить показникова функція, отже, можна використати признак Даламбера.

$$u_n=\frac{2n+5}{3^n}\ ,\quad u_n=\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}=\frac{2n+7}{3^{n+1}}.$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3^{n+1}}:\frac{2n+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n+5}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{2n+5}=\frac{1}{3}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

15. $$\frac{1!}{2}+\frac{3!}{2\cdot 5}+\frac{5!}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$$

Побудуємо формулу загального члена ряду. Числівники дробів є факторіалами чисел $1, 3, 5,\ldots$, які складають арифметичну прогресію з першим членом 1 та різницею 2, тобто відповідають формулі $a_n=2n-1$. Знаменники дробів є факторіальними добутками, останні множники яких обчислюються як $3n-1$. Тоді загальний член ряду має вигляд $u_n=\frac{(2n-1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$. У цьому випадку також доцільно скористатися ознакою Даламбера.

$$u_{n+1}=\frac{(2(n+1)-1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3(n+1)-1)}=\frac{(2n+1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}:\frac{(2n-1)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot(2n+1)}{3n+2}=\infty.$$

За ознакою Даламбера ряд розбігається.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{n!}$

Загальний член ряду є арктангенсом нескінченно малого аргументу, який містить факторіал, отже, скористаємося ознакою Даламбера.

$$u_n = arctg\,\frac{1}{n!}\ ,\ u_{n+1} = arctg\,\frac{1}{(n+1)!}.$$

При обчисленні D використаємо наслідок першої важливої границі

$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1$, тобто $arctg\,x \sim x$ при $x\to 0$.

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty} arctg\,\frac{1}{(n+1)!}:arctg\,\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$

Спроба використати ознаку Даламбера для дослідження наданого ряду призведе до результату $D=1$. Скористаємося ознакою порівняння.

$$u_n=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Помітимо, що кожен з множників буде більшим за одиницю, отже, справджується нерівність $u_n>\frac{2n}{2n-1}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}$ буде розбіжним за необхідною умовою збіжності $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=1\neq 0\right)$, тоді, згідно з ознакою порівняння, досліджуваний ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$ також буде розбіжним.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}$

Як і у попередньому прикладі, ознака Даламбера призведе до результату $D=1$. Знову скористаємося ознакою порівняння.

$$u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}.$$

Легко помітити, що кожний з множників $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{2n-1}{2n-2}$ більший за одиницю.

Тоді $u_n>\frac{1}{2n}$. Гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, отже, за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}$ також буде розбіжним.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{2n+5}\right)^n$

Загальний член ряду є степенево-показниковою функцією, отже, можна спробувати радикальну ознаку Коші.

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{5n-3}{2n+5}\right)^n\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+5}=\frac{5}{2}>1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(3n+1)}$

Скористаємося радикальною ознакою Коші .

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^n(3n+1)}\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(3n+1)}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0<1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається.

21. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{10^n}$$

Скористаємося радикальною ознакою Коші . При обчисленні K використаємо другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{10^n}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{10} = \frac{e}{10} < 1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається.

22. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Спроба використати радикальну ознаку Коші призведе до результату $K = 1$. Скористаємося необхідною умовою збіжності.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Ряд розбігається.

23. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Загальний член ряду задається за допомогою функції $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Ця функція неперервного аргументу для $x \geq 2$ набуває додатних значень та є спадною. Обчислимо невласний інтеграл першого роду від цієї функції та скористаємося інтегральною ознакою Коші.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left\{\ln x = t, \frac{dx}{x} = dt, \left| \begin{array}{l} x = 2, t = \ln 2 \\ x = \beta, t = \ln\beta \end{array}\right.\right\} =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} 2\sqrt{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln \beta} = 2 \lim_{\beta \to +\infty} \left(\sqrt{\ln \beta} - \sqrt{\ln 2}\right) = \infty .$$

Інтеграл є розбіжним, отже, ряд також розбігається.

Завдання для самостійної роботи

З'ясувати за допомогою означення, чи буде збіжним числовий ряд, та за умови позитивної відповіді знайти суму ряду.

1. $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{7}{3} + \ldots$ **2.** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots$ **3.** $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{8}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{8}} + \frac{\sqrt{18} - \sqrt{13}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{13}} + \ldots$

З'ясувати за допомогою ознак збіжності, чи буде збіжним числовий ряд.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n+5}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4}{\sqrt{2n-1}}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, n^3$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[3]{n}$ **9.** $\frac{1}{3} + \frac{5}{10} + \frac{9}{17} + \ldots$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+1}{3n^2+1}$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n^2+7}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(2n+1)(3n-1)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n+1}{5n^3-4}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(4n+3)}{\sqrt{n+1}}$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3(2n+1)}{n^2+1}$

16. $\frac{1}{1} + \frac{5}{4} + \frac{9}{9} + \ldots$ **17.** $\frac{2}{1 \cdot \sqrt{3}} + \frac{5}{8 \cdot \sqrt{4}} + \frac{8}{27 \cdot \sqrt{5}} + \ldots$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-arctg\, n}}{n^2+1}$ **20.** $\frac{1}{2\ln^3 2} + \frac{1}{3\ln^3 3} + \frac{1}{4\ln^3 4} + \ldots$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(2n-1)!}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{1}{3^n}$ **25.** $\frac{2}{1} + \frac{5}{3} + \frac{10}{9} + \ldots$ **26.** $\frac{1}{1} + \frac{3!}{1 \cdot 4} + \frac{5!}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \ldots$

27. $\arcsin 1+\arcsin\frac{1}{2!}+\arcsin\frac{1}{3!}+\ldots$ **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\ln^n(n+1)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(\frac{5n+3}{n}\right)^n}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$ **31.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+7}{3n+1}\right)^n$

32. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$ **33.** $\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln^2 5}+\frac{1}{\ln^3 7}+\ldots$

34. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots$

Відповіді.

1. Розбігається. **2.** Збігається , $S=\frac{3}{4}$. **3.** Збігається , $S=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** За необхідною умовою розбігається . **5.** За необхідною умовою розбігається . **6.** За необхідною умовою розбігається . **7.** За необхідною умовою розбігається . **8.** За необхідною умовою розбігається . **9.** За необхідною умовою розбігається . **10.** За граничною ознакою порівняння розбігається. **11.** За граничною ознакою порівняння збігається. **12.** За граничною ознакою порівняння розбігається. **13.** За граничною ознакою порівняння збігається. **14.** За ознакою порівняння розбігається. **15.** За ознакою порівняння збігається. **16.** За граничною ознакою порівняння розбігається. **17.** За граничною ознакою порівняння збігається. **18.** За інтегральною ознакою Коші ряд розбігається. **19.** За інтегральною ознакою Коші ряд збігається. **20.** За інтегральною ознакою Коші ряд збігається. **21.** За ознакою Даламбера ряд розбігається. **22.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **23.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **24.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **25.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **26.** За ознакою Даламбера ряд розбігається. **27.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **28.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **29.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **30.** За радикальною ознакою Коші ряд розбігається. **31.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **32.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **33.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **34.** За радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

1.2. Знакозмінні ряди

Якщо серед членів ряду є як додатні, так і від'ємні, такий ряд називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів.

Якщо ряд є збіжним, а ряд з абсолютних величин розбігається, то такий знакозмінний ряд називається ***умовно збіжним***.

Ряд, члени якого по черзі є додатними та від'ємними, називається ***рядом з чергуванням знаків*** (або ***рядом Лейбніца***).Такий ряд доцільно записувати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n|u_n|$.

Теорема Лейбніца.

Якщо виконуються такі умови:

1) $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$; та

2) послідовність $|u_1|$, $|u_2|$, … $|u_n|$ …є монотонно спадною,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n|u_n|$ збігається.

<u>Зауваження.</u> Теорема Лейбніца надає ***достатню*** умову збіжності рядів з чергуванням знаків, отже, у випадку не монотонно спадної, але нескінченно малої послідовності $|u_n|$ робити висновок про розбіжність ряду неприпустимо.

Зразки розв'язування задач

З'ясувати, чи буде заданий ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}$

Члени заданого ряду мають різні знаки. Дослідимо цей ряд на абсолютну збіжність.

$$\left|u_n\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається (оскільки показник степеня $p = 2 > 1$). Згідно з ознакою порівняння знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}\right|$ також збігається, отже знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}$ збігається абсолютно.

2. $\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{6}{13} - \ldots$

Знаки членів ряду чергуються та відповідають залежності $(-1)^{n+1}$. Загальний член ряду задається формулою $u_n = (-1)^{n+1}\frac{2n}{4n+1}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца.

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1} = \frac{1}{2} \ne 0.$$

За необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{11}} - \ldots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца.

1) $\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}} = 0$;

2) $\left|u_1\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$, $\left|u_2\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, $\left|u_3\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{11}}$, …

$$\left|u_1\right| > \left|u_2\right| > \left|u_3\right| > \ldots, \left|u_n\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}} > \left|u_{n+1}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+7}} .$$

За теоремою Лейбніца ряд збігається.

Дослідимо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^{1/3}}.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ розбігається (оскільки показник степеня $p = \frac{1}{3} < 1$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}} : \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \neq 0.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$ також розбігається, отже , ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n+5}}$ збігається умовно.

<u>Зауваження.</u> Умова спадності може виконуватися не з першого члена ряду.

4. $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \ldots$

Загальний член ряду задається формулою $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^n}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца.

1) $\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)'}{(2^n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \ln 2} = 0$;

2) $|u_1| = \frac{1}{2}$, $|u_2| = \frac{3}{4}$, $|u_3| = \frac{5}{8}$, $|u_4| = \frac{7}{16} \ldots$

$|u_1| < |u_2|$, $|u_2| > |u_3| > |u_4| > \ldots$, $|u_n| > |u_{n+1}|$, оскільки функція $f(x) = \frac{2x-1}{2^x}$ є монотонно спадною для $x > 2$ ($f'(x) = \frac{2-(2x-1)\ln 2}{2^x} < 0$).

За теоремою Лейбніца ряд збігається.

Дослідимо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$. Скористаємося для цього ознакою Даламбера.

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}\ ,\ \ u_n = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}} : \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ збігається, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2^n}$ збігається абсолютно.

<u>Зауваження.</u> У останньому прикладі можна обмежитися дослідженням ряду з модулів, оскільки при абсолютній збіжності автоматично забезпечується збіжність за Лейбніцем.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$

Дослідимо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$. Скористаємося для цього ознакою Даламбера.

$$u_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}\ ,$$

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3(n+1)-2)}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!} : \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(2n+2)\cdot(2n+3)} = 0 < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$ збігається, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$ збігається абсолютно.

<u>Зауваження.</u> Якщо при дослідженні ряду з модулів за радикальною ознакою Коші або за ознакою Даламбера з’ясовано, що цей ряд розбігається, то мо-

жна зробити висновок, що буде розбіжним і знакозмінний ряд, оскільки в таких випадках ($K>1$ або $D>1$) не виконується необхідна умова збіжності.

Завдання для самостійної роботи

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n^2+3}{3n-1}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^n(2n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(3n+5)}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$ **6.** $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{27}-\ldots$

Відповіді.

1. Абсолютно збігається. **2.** Розбігається . **3.** Абсолютно збігається. **4.** Умовно збігається. **5.** Умовно збігається . **6.** Абсолютно збігається .

Розділ 2
СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Збіжність степеневих рядів

Розглянемо послідовність функцій $\{u_n(x)\}, n\geq 1$. Вираз вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

називається ***функціональним рядом***.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ є ***збіжним в точці*** $x=x_0$, якщо збігається числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, та ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x_0)|$.

Множина всіх значень аргументу x, для яких функції $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... визначені, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається , називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Сума $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=S_n(x)$ називається n-ю ***частинною сумою*** ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, а її границя $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ – ***сумою*** цього ряду. Різницю $S(x)-S_n(x)=R_n(x)$ називають ***залишком*** ряду.

Область збіжності функціонального ряду можна знайти за ознакою Даламбера або радикальною ознакою Коші.

Ознака Даламбера.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є ***абсолютно збіжним*** для тих значень аргументу x, для яких справджується нерівність

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1 .$$

Якщо $D(x)>1$, ряд є ***розбіжним***, а поведінка функціонального ряду при тих значеннях аргументу, для яких $D(x)=1$, потребує окремого дослідження.

Ознака Коші.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є ***абсолютно збіжним*** для тих значень аргументу x, для яких справджується нерівність

$$K(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n(x)\right|}<1 .$$

Якщо $K(x)>1$, ряд є ***розбіжним***, а поведінка функціонального ряду при тих значеннях аргументу, для яких $K(x)=1$, потребує окремого дослідження.

Функціональний ряд вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$, $x\in(-\infty;+\infty)$ називається ***степеневим***, а числа a_0, a_1, a_2, ... a_n, ... – коефіцієнтами цього ряду.

Якщо $x_0=0$, степеневий ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$.

Для будь-якого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ існує таке число $R \geq 0$, що для $x \in (-R; R)$ розглядуваний ряд збігається , а для $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$ ряд є розбіжним. Інтервал $(-R; R)$ називається ***інтервалом збіжності*** , а число R – ***радіусом збіжності*** цього ряду.

Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ є абсолютно збіжним для значень аргументу, які задовольняють умові $|x - x_0| < R$, тобто інтервалом збіжності такого ряду буде $(x_0 - R \; ; \; x_0 + R)$.

Поведінка степеневого ряду на границях інтервалу збіжності потребує окремого дослідження.

Якщо серед коефіцієнтів ряду немає таких, що дорівнюють нулю, (тобто у ряді немає пропуску степенів), радіус збіжності обчислюється за формулами

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \; .$$

Якщо радіус збіжності R є нескінченно великим, ряд збігається на всій множині дійсних чисел, а якщо $R = 0$, ряд буде збіжним тільки в одній точці $x = 0$ (або $x = x_0$).

Якщо ряд побудовано з пропуском степенів, для визначення інтервалу збіжності використовують умови для функціонального ряду, тобто нерівності $D(x) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$ або $K(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1$.

Зразки розв'язування задач

1. З'ясувати, чи буде степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n^3}}$ збігатися у точці $x = 4$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \, .$$

Це знакододатний числовий ряд, який буде збіжним ($p = \frac{3}{2} > 1$).

Знайти інтервал збіжності ряду:

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{n}$

Для даного ряду $a_n=\frac{3^n}{n}$; $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{n+1}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{n}:\frac{3^{n+1}}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{n}\cdot\frac{n+1}{3^n\cdot 3}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{3^n\cdot 3}\cdot\frac{n+1}{n}\right|=\frac{1}{3}.$$

Інтервал збіжності ряду $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(x+3)^n}{10^n}$

Для даного ряду $x_0=-3$, $a_n=\frac{\sqrt{n}}{10^n}$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{10^{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{10^n}:\frac{\sqrt{n+1}}{10^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{10^n}\cdot\frac{10^n\cdot 10}{\sqrt{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^n\cdot 10}{10^n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right|=10.$$

Інтервал збіжності ряду $-3-10<x<-3+10$, або $-13<x<7$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(x-5)^n}{(2n+1)!}$

Для даного ряду $x_0=5$, $a_n=\frac{3^n}{(2n+1)!}$, $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{(2n+1)!}:\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{3^n\cdot 3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}{(2n+1)!\cdot 3}\right|=\infty.$$

Таким чином, ряд буде збіжним, якщо $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+7)^n}{6^n}$

Для даного ряду $x_0 = -7$, $a_n = \frac{n!}{6^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{6^{n+1}}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{6^n} : \frac{(n+1)!}{6^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{6^n}\cdot\frac{6^n\cdot 6}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\cdot 6}{n!(n+1)}\right| = 0$$

Таким чином, ряд буде збіжним, якщо $x = -7$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n-1}}{n\cdot 8^n}$

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^{3n-1}}{n\cdot 8^n} \ , \ u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{3n+2}}{(n+1)\cdot 8^{n+1}};$$

$$D(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{3n+2}}{(n+1)\cdot 8^{n+1}} : \frac{(x+1)^{3n-1}}{n\cdot 8^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{3n+2}}{(n+1)\cdot 8^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 8^n}{(x+1)^{3n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^3}{8^{n+1}}\cdot\frac{n}{(n+1)}\right| = \frac{|x+1|^3}{8}.$$

Нерівність $D(x) < 1$ справджується, якщо

$$\frac{|x+1|^3}{8} < 1 \Rightarrow |x+1|^3 < 8 \Rightarrow |x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2.$$

Таким чином, інтервалом збіжності ряду буде $(-3;1)$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n^n}$

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Коші:

$$u_n(x) = \frac{x^{5n}}{n^n};$$

$$K(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{5n}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^5}{n}.$$

Нерівність $K(x) < 1$ справджується для будь-якого значення x, отже, ряд буде збіжним для $x \in (-\infty;+\infty)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x+3)^{2n-1}$

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x)=n!\,(x+3)^{2n-1}\ ,\ u_{n+1}(x)=(n+1)!\,(x+3)^{2n+1};$$

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x+3)^{2n+1}}{n!\,(x+3)^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(n+1)(x+3)^2\right|.$$

Нерівність $K(x)<1$ справджується, лише якщо $x+3=0$, отже, ряд буде збіжним тільки для $x=-3$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{8^n\sqrt[6]{n}}$

Для заданого ряду $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{8^n\sqrt[6]{n}}$, $a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{8^{n+1}\sqrt[6]{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{8^n\sqrt[6]{n}}:\frac{(-1)^{n+2}}{8^{n+1}\sqrt[6]{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{8\sqrt[6]{n+1}}{\sqrt[6]{n}}=8.$$

Інтервал збіжності ряду задається умовою $-8<x<8$. Дослідимо поведінку ряду на границях цього інтервалу.

$$x=-8:\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-8)^n}{8^n\sqrt[6]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{(-1)^{n+1}(-1)^n}^{(-1)^{2n+1}=-1}8^n}{8^n\sqrt[6]{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}$ є розбіжним $\left(p=\frac{1}{6}<1\right)$, отже, степеневий ряд при $x=-8$ розбігається.

$$x=8:\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}8^n}{8^n\sqrt[6]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}.$$

Це ряд Лейбніца . Перевіримо, чи виконуються умови відповідної теореми.

1) $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}=0$;

2) $|u_1|=1$, $|u_2|=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, $|u_3|=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$, …

$$|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots, \ |u_n| > |u_{n+1}|.$$

За теоремою Лейбніца ряд є збіжним, тобто при $x = 8$ степеневий ряд збігається.

Таким чином, областю збіжності досліджуваного ряду є $(-8;8]$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-7)^{2n-1}}{n}$

Якщо необхідно дослідити поведінку ряду за степенями $x - x_0$ на границях інтервалу збіжності, доцільно ввести допоміжну змінну $t = x - x_0$ та розшукувати область збіжності отриманого ряду за новою змінною.

$$t = x - 7 \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \, t^{2n-1}}{n}.$$

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{5^n \, t^{2n-1}}{n} \ , \ u_{n+1} = \frac{5^{n+1} \, t^{2n+1}}{n+1} \ ;$$

$$D(t) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1} \, t^{2n+1}}{n+1} : \frac{5^n \, t^{2n-1}}{n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1} \, t^{2n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{5^n \, t^{2n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 5\, t^2 \cdot \frac{n}{n+1} \right| = 5t^2.$$

Нерівність $D(t) < 1$ справджується, якщо

$$5t^2 < 1 \Rightarrow t^2 < \frac{1}{5} \ \Rightarrow |t| < \frac{1}{\sqrt{5}} \ \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}} < t < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Дослідимо поведінку ряду на границях інтервалу збіжності.

$$t = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (-1)^{2n-1}}{n\, 5^{\frac{2n-1}{2}}} = -\sqrt{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним, отже , степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \, t^{2n-1}}{n}$ розбігається при $t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$t=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\,5^{\frac{2n-1}{2}}}=\sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, отже , степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\,t^{2n-1}}{n}$ розбігається при $t=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Таким чином, область збіжності ряду задається умовою

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}<t<\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \text{ або }\ -\frac{1}{\sqrt{5}}<x-7<\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ 7-\frac{1}{\sqrt{5}}<x<7+\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt[7]{n^2}}$

Введемо нову змінну $t=x+2$ та знайдемо область збіжності отриманого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt[7]{n^2}}$.

Для цього ряду $a_n=\frac{1}{3^n\sqrt[7]{n^2}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}\sqrt[7]{(n+1)^2}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3^n\sqrt[7]{n^2}}:\frac{1}{3^{n+1}\sqrt[7]{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\sqrt[7]{(n+1)^2}}{3^n\sqrt[7]{n^2}}\right|=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\sqrt[7]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}=3.$$

Інтервалом збіжності допоміжного ряду буде $-3<t<3$. Дослідимо поведінку ряду на границях інтервалу.

$$t=-3\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt[7]{n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,3^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt[7]{n^2}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[7]{n^2}}.$$

Це ряд Лейбніца . Перевіримо, чи виконуються умови відповідної теореми.

1) $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{n^2}}=0$;

2) $|u_1|=1$, $|u_2|=\frac{1}{\sqrt[7]{4}}$, $|u_3|=\frac{1}{\sqrt[7]{9}}$, …

$$|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots, \ |u_n| > |u_{n+1}|.$$

За теоремою Лейбніца ряд є збіжним, тобто при $t = -3$ степеневий ряд збігається.

$$t = 3 \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n \cdot \sqrt[7]{n^2}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^2}} \ .$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^2}}$ є розбіжним $\left(p = \frac{2}{7} < 1 \right)$, отже, степеневий ряд при $t = 3$ розбігається.

Таким чином, область збіжності допоміжного ряду відповідає умові $-3 \le t < 3$.

Тоді область збіжності основного ряду задається нерівністю

$$-3 \le x + 2 < 3 \quad ; \quad -5 \le x < 1.$$

Отже, область збіжності заданого ряду – це проміжок $[-5\,;1)$.

Завдання для самостійної роботи

1. З'ясувати, чи буде степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+1)3^n}$ збігатися у точці $x_0 = 2$.

Знайти інтервал збіжності ряду:

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)3^n}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (2n+1)^2 \cdot x^n$; **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$;

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n} \cdot 5^n}$; **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$.

Знайти область збіжності ряду:

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$; **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!}$; **9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$; **11.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} \cdot x^n$; **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^n$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$; **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$; **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$; **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$;

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^{3n}}{\sqrt{n+7}}$; **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+4)^{2n}}{4^n\cdot(3n+1)^3}$.

Відповіді.

1. Ряд збігається за ознакою Лейбніца.

2. $(-3;3)$; **3.** $(-1;1)$; **4.** $x=0$; **5.** $(-2;8)$; **6.** $(2;4)$;

7. $[-2;2)$; **8.** $(-\infty;+\infty)$; **9.** $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; **10.** $(-\infty;+\infty)$;

11. $(-4;4)$; **12.** $(-2;2)$; **13.** $(-e;e)$; **14.** $(2;8]$; **15.** $x=-3$;

16. $(-2;4)$; **17.** $(-7;-3)$; **18.** $[-3;1]$; **19.** $[1;2)$; **20.** $[-6;-2]$.

2.2. Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція $y=f(x)$ має в точці x_0 похідні будь-якого порядку, цій функції відповідає ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad .$$

Степеневий ряд у околі точки $x_0=0$ має назву ряду Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad .$$

Наведемо розвинення у ряд Маклорена деяких елементарних функцій та вкажемо інтервали збіжності цих рядів (у точках, що належать інтервалам збіжності, ряди збігаються до значень відповідних функцій у цих точках).

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ ; \qquad -\infty < x < +\infty.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\ ; \qquad -\infty < x < +\infty.$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ ; \qquad -\infty < x < +\infty.$$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n\ ; \qquad -1 < x < 1.$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\ ; \qquad -1 < x < 1.$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ ; \qquad -1 < x < 1.$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\ ; \qquad -1 < x < 1.$$

Степеневі ряди мають такі важливі властивості:

а) степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати, якщо проміжок інтегрування належить області збіжності ряду;

б) степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати у точках, що належать інтервалу збіжності.

Зразки розв'язування задач

1. Знайти перші два ненульові члени розвинення у ряд Маклорена функції $y = tg\,3x$.

Ряд Маклорена має вигляд

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Обчислимо значення заданої функції та декількох її перших похідних при $x_0=0$.

$$y=tg\,3x,\quad y(0)=tg\,0=0\ ;$$

$$y'=\frac{3}{\cos^2 3x},\quad y'(0)=\frac{3}{\cos^2 0}=3\ ;$$

$$y''=\frac{18\sin 3x}{\cos^3 3x},\quad y''=\frac{18\sin 0}{\cos^3 0}=0\ ;$$

$$y'''=18\ \frac{3\cos 3x\cdot\cos^3 3x-\sin 3x\cdot 3\cos^2 3x(-3\sin 3x)}{\cos^6 3x}=54\ \frac{3-2\cos^2 3x}{\cos^4 3x},$$

$$y'''(0)=54\ \frac{3-2\cos^2 0}{\cos^4 0}=54.$$

Тоді розвинення функції має вигляд

$$y=0+\frac{3}{1!}x+0+\frac{54}{3!}x^3+\ldots,$$

$$y\approx 3x+9x^3.$$

2. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $x_0=-1$ поліном $P(x)=-x^3+2x$.

Розвинення у ряд Тейлора полінома буде мати скінченну кількість ненульових членів.

$$P(x)=P(-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\ldots\ .$$

$$P(-1)=-(-1)^3+2\cdot(-1)=-1\ ;$$

$$P'(x)=-3x^2+2\ ,\qquad P'(-1)=-3\cdot(-1)^2+2=-1\ ;$$

$$P''(x)=-6x\ ,\qquad P''(-1)=-6\cdot(-1)=6\ ;$$

$$P'''(x)=-6\ ,\qquad P'''(-1)=-6\ ;$$

$$P^{(4)}(x)=P^{(5)}(x)=\ldots\equiv 0\ .$$

$$P(x)=-1+\frac{-1}{1!}(x+1)^1+\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{-6}{3!}(x+1)^3=$$

$$=-1-(x+1)+3(x+1)^2-(x+1)^3.$$

Розвинути функцію у ряд Маклорена за допомогою табличних розвинень. Вказати інтервал збіжності отриманого ряду:

3. $y=\sin\frac{x^3}{7}$

При побудові розвинення буде введено допоміжну змінну за аргументом складної функції.

$$\sin\frac{x^3}{7}=\left\{\frac{x^3}{7}=t\right\}=\sin t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x^3}{7}\right)^{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\,7^{2n-1}}x^{6n-3};$$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\,7^{2n-1}}x^{6n-3}.$$

Табличний ряд буде збігатися при $t\in(-\infty;+\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x\in(-\infty;+\infty)$.

4. $y=x^3e^{-5x^2}$

$$e^{-5x^2}=\left\{-5x^2=t\right\}=e^t=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5x^2)^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{n!}x^{2n}$$

$$y=x^3\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{n!}x^{2n}\right);$$

$$y=x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{n!}x^{2n+3}.$$

Табличний ряд буде збігатися при $t\in(-\infty;+\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. $y=x^2\ln(1-3x^4)$

$$\ln(1-3x^4)=\left\{t=-3x^4\right\}=\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(-3x^4\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{(-1)^{n+1}(-1)^n}^{(-1)^{2n+1}=-1}3^n x^{4n}}{n}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{4n}}{n}$$

$$y=x^2\cdot\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{4n}}{n}\right);$$

$$y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{4n+2}}{n}\ .$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|-3x^4\right|<1\ \Rightarrow\ \left|3x^4\right|<1\ \Rightarrow\ \left|x^4\right|<\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ |x|<\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\ .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\ ;\ \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$.

6. $y=x^3\ln\left(7+5x^2\right)$

$$\ln\left(7+5x^2\right)=\ln\left[7\left(1+\frac{5x^2}{7}\right)\right]=\ln 7+\ln\left(1+\frac{5x^2}{7}\right)=$$

$$=\left\{t=\frac{5x^2}{7}\right\}=\ln 7+\ln(1+t)=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}=$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{5x^2}{7}\right)^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n x^{2n}}{7^n n}\ ;$$

$$y=x^3\left(\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n x^{2n}}{7^n n}\right);$$

$$y=x^3\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n x^{2n+3}}{7^n n}\ .$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|\frac{5x^2}{7}\right|<1 \quad \Rightarrow \quad |x^2|<\frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad |x|<\sqrt{\frac{7}{5}} \quad .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\sqrt{\frac{7}{5}}\,;\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$.

7. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+5x)^2}}$

Задану функцію можна записати у вигляді $y=(1+5x)^{-2/3}$ та скористатись табличним розвиненням у біноміальний ряд для $m=-\dfrac{2}{3}$.

Спочатку запишемо вказане табличне розвинення:

$$(1+t)^{-\frac{2}{3}}=1+\frac{-\frac{2}{3}}{1!}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)}{2!}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)}{3!}+\cdots$$

$$+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{2}{3}-n+1\right)}{n!}t^n+\cdots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{2}{3}-n+1\right)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\ldots\left(\frac{1-3n}{3}\right)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{3^n\,n!}t^n\,.$$

Повернемося до заданої функції:

$$(1+5x)^{-2/3}=\{t=5x\}=(1+t)^{-2/3}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{3^n\,n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{3^n\,n!}\ (5x)^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)\cdot5^n}{3^n\,n!}\ x^n\,;$$

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \; 2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1) \cdot 5^n}{3^n \, n!} \; x^n .$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t| < 1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$|5x| < 1 \;\; \Rightarrow \;\; |x| < \frac{1}{5} \qquad .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\frac{1}{5} \, ; \frac{1}{5} \right)$.

8. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{6 + 5x^3}}$

Задану функцію можна записати у вигляді $y = x^2 \cdot \left(6 + 5x^3\right)^{-\frac{1}{4}}$ та скористатись табличним розвиненням у біноміальний ряд для $m = -\dfrac{1}{4}$.

Спочатку запишемо вказане табличне розвинення:

$$(1+t)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!} t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)\ldots\left(\frac{3-4n}{4}\right)}{n!} t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}{4^n \, n!} t^n .$$

Повернемося до заданої функції:

$$\left(6 + 5x^3\right)^{-\frac{1}{4}} = \left[6 \cdot \left(1 + \frac{5x^3}{6}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} = \left\{ t = \frac{5x^3}{6} \right\} = 6^{-\frac{1}{4}} \cdot (1+t)^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= 6^{-\frac{1}{4}} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}{4^n \, n!} t^n \right] =$$

$$= 6^{-\frac{1}{4}} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}{4^n \, n!} \cdot \left(\frac{5x^3}{6} \right)^n \right] =$$

$$= 6^{-\frac{1}{4}} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3) \cdot 5^n}{24^n \cdot n!} \cdot x^{3n} \right];$$

$$y = x^2 \cdot 6^{-\frac{1}{4}} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3) \cdot 5^n}{24^n \cdot n!} \cdot x^{3n} \right];$$

$$y = 6^{-\frac{1}{4}} \cdot x^2 + 6^{-\frac{1}{4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3) \cdot 5^n}{24^n \cdot n!} \cdot x^{3n+2}.$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t| < 1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left| \frac{5x^3}{6} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x^3| < \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt[3]{\frac{6}{5}} \quad .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\sqrt[3]{\frac{6}{5}} \, ; \sqrt[3]{\frac{6}{5}} \right)$.

9. Розвинути в степеневий ряд функцію $y = \frac{1}{x^2}$ в околі точки $x_0 = -3$.

<u>1 спосіб.</u> Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x) = y(-3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(-3)}{n!} (x+3)^n .$$

Обчислимо у точці $x_0 = -3$ значення заданої функції та її кількох похідних, та спробуємо знайти закономірність, якій вони підкоряються.

$$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \; ; \qquad y(-3) = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{3^2} ;$$

$$y' = -2x^{-3} \; ; \qquad y'(-3) = -\frac{2}{(-3)^3} = \frac{2}{3^3} ;$$

$$y'' = -2 \cdot (-3) x^{-4} = 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \; ; \qquad y''(-3) = \frac{2 \cdot 3}{(-3)^4} = \frac{2 \cdot 3}{3^4} ;$$

$$y''' = 2 \cdot 3 \cdot (-4) x^{-5} = -2 \cdot 3 \cdot 4 x^{-5} \; ; \qquad y'''(-3) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(-3)^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3^5} .$$

Легко помітити, що значення похідних є додатними дробами, числівники яких мають факторіальний вигляд, а знаменники є степенями основи **3.** Аналіз цих

виразів приводить до висновку, що шукані значення похідних можна обчислити за формулою

$$y^{(n)}(-3)=\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}{3^{n+2}}.$$

Тоді ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x)=\frac{1}{3^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot\ldots(n+1)}{3^{n+2}\cdot n!}(x+3)^n;$$

$$y(x)=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+3)^n.$$

Обчислимо радіус збіжності отриманого ряду.

$$a_n=\frac{n+1}{3^{n+2}},\quad a_{n+1}=\frac{n+2}{3^{n+3}},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3^{n+2}}:\frac{n+2}{3^{n+3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}\cdot\frac{3^{n+3}}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n+2}\cdot 3}{3^{n+2}\cdot(n+1)}=3.$$

Тоді ряд абсолютно збігається, якщо $|x+3|<3$.

Таким чином, інтервал збіжності задається умовою $x\in(-6;0)$.

<u>2 спосіб.</u> Використаємо табличне розвинення у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z=x-x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$y=\frac{1}{x^2}=\left\{\begin{matrix}z=x+3;\\ x=z-3\end{matrix}\right\}=\frac{1}{(z-3)^2}=\frac{1}{(3-z)^2}=\frac{1}{\left[3\left(1-\frac{z}{3}\right)\right]^2}=\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{z}{3}\right)^{-2}=$$

$$=\left\{t=-\frac{z}{3}\right\}=\frac{1}{9}\cdot(1+t)^{-2};$$

$$(1+t)^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)\ldots(-2-n+1)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)(-4)\ldots(-1-n)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}{n!}t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)t^n$$

$$y=\frac{1}{9}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)\,t^{\,n}\right]=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)\left(-\frac{z}{3}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n+1)(-1)^n}{3^n}\,z^{\,n}=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}\,z^{\,n}=$$

$$=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}\,(x+3)^n\ .$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$y=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}\,(x+3)^n\,.$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|-\frac{z}{3}\right|<1\ \Rightarrow\ |z|<3\ \Rightarrow\ |x+3|<3\ \Rightarrow\ -6<x<0\ .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $(-6\,;0\ )$.

10. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=\cos\frac{\pi x}{10}$ в околі точки $x_0=5$.

<u>1 спосіб.</u> Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x)=y(5)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(5)}{n\,!}\,(x-5)^n\,.$$

Обчислимо у точці $x_0=5$ значення заданої функції та її кількох похідних, та спробуємо знайти закономірність, якій вони підкоряються.

$$y=\cos\frac{\pi x}{10}\ ,\qquad y(5)=\cos\frac{\pi\cdot 5}{10}=\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$y'=-\sin\frac{\pi x}{10}\cdot\frac{\pi}{10}\ ,\qquad y'(5)=-\sin\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\frac{\pi}{10}=-\frac{\pi}{10};$$

$$y''=-\cos\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\ ,\qquad y''(5)=-\cos\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^2=0;$$

$$y'''=\sin\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\ ,\qquad y'''(5)=\sin\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3=\frac{\pi^3}{10^3};$$

$$y^{(4)} = \cos\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^4, \qquad y^{(4)}(5) = \cos\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0;$$

$$y^{(5)} = -\sin\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5, \qquad y^{(5)}(5) = -\sin\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 = -\frac{\pi^5}{10^5}.$$

Легко помітити, що парні похідні дорівнюють **0**, а значення непарних є знакозмінними дробами, числівники яких є степенями основи π, а знаменники – степенями основи **10.** Аналіз цих виразів приводить до висновку, що шукані значення похідних можна обчислити за формулою

$$y^{(2k-1)}(5) = (-1)^k\cdot\frac{\pi^{2k-1}}{10^{2k-1}}.$$

Тоді ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\pi^{2k-1}}{10^{2k-1}\cdot(2k-1)!}(x-5)^{2k-1}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду за допомогою ознаки Даламбера:

$$u_k(x) = \frac{(-1)^k\cdot\pi^{2k-1}}{10^{2k-1}\cdot(2k-1)!}(x-5)^{2k-1},$$

$$u_{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot\pi^{2k+1}}{10^{2k+1}\cdot(2k+1)!}(x-5)^{2k+1};$$

$$D(x) = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_{k+1}(x)}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot\pi^{2k+1}\cdot(x-5)^{2k+1}}{10^{2k+1}\cdot(2k+1)!} : \frac{(-1)^k\cdot\pi^{2k-1}\cdot(x-5)^{2k-1}}{10^{2k-1}\cdot(2k-1)!}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\pi^2\cdot(x-5)^2}{10^2\cdot 2k\cdot(2k+1)}\right| = 0.$$

Нерівність $D(x) < 1$ справджується для будь-якого значення x, отже, ряд буде збіжним для $x\in(-\infty;+\infty)$.

<u>2 спосіб.</u> Використаємо табличне розвинення у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z = x - x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$y=\cos\frac{\pi x}{10}=\begin{Bmatrix} z=x-5 \\ x=z+5 \end{Bmatrix}=\cos\frac{\pi(z+5)}{10}=\cos\left(\frac{\pi z}{10}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi z}{10}=$$

$$=\left\{t=\frac{\pi z}{10}\right\}=-\sin t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)!}\cdot\left(\frac{\pi z}{10}\right)^{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}\cdot(2n-1)!}\cdot(x-5)^{2n-1}\ .$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}\cdot(2n-1)!}\cdot(x-5)^{2n-1}\ .$$

Табличний ряд буде збігатися при $t\in(-\infty;+\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x\in(-\infty;+\infty)$.

11. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=3^{-x}$ в околі точки $x_0=2$.

<u>1 спосіб.</u> Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x)=y(2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^{n}\ .$$

Обчислимо у точці $x_0=2$ значення заданої функції та її кількох похідних, та спробуємо знайти закономірність, якій вони підкоряються.

$y=3^{-x}$, $\qquad y(2)=3^{-2}=\frac{1}{9}$;

$y'=3^{-x}\ln 3\cdot(-1)=-3^{-x}\ln 3$, $\qquad y'(2)=-3^{-2}\ln 3=-\frac{1}{9}\ln 3$;

$y''=-3^{-x}\ln^2 3\cdot(-1)=3^{-x}\ln^2 3$, $\qquad y''(2)=3^{-2}\ln^2 3=\frac{1}{9}\ln^2 3$;

$y'''=3^{-x}\ln^3 3\cdot(-1)=-3^{-x}\ln^3 3$, $\qquad y'''(2)=-3^{-2}\ln^3 3=-\frac{1}{9}\ln^3 3$.

Аналіз цих виразів приводить до висновку, що шукані значення похідних можна обчислити за формулою

$$y^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n}}{9}\ln^{n}3\ .$$

Тоді ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^n 3}{9\cdot n!}(x-2)^n.$$

Обчислимо радіус збіжності отриманого ряду.

$$a_n=\frac{(-1)^n\ln^n 3}{9\cdot n!}\ ,\ \ a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} 3}{9\cdot(n+1)!}\ ,$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln^n 3}{9\cdot n!}:\frac{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} 3}{9\cdot(n+1)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln^n 3}{9\cdot n!}\cdot\frac{9\cdot(n+1)!}{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} 3}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\ln 3}=\infty.$$

Таким чином, ряд буде збіжним при $x\in(-\infty;+\infty)$.

<u>2 спосіб.</u> Використаємо табличне розвинення у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z=x-x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$y=3^{-x}=\begin{Bmatrix}z=x-2\\x=z+2\end{Bmatrix}=3^{-(z+2)}=3^{-z-2}=3^{-2}\cdot 3^{-z}=\frac{1}{9}\cdot\left(e^{\ln 3}\right)^{-z}=\frac{1}{9}\cdot e^{-z\ln 3}=$$

$$=\{t=-z\ln 3\}=\frac{1}{9}e^{t}=\frac{1}{9}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)=\frac{1}{9}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-z\ln 3)^n}{n!}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n\cdot\ln^n 3}{9\cdot n!}=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln^n 3}{9\cdot n!}(x-2)^n\ .$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$y=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln^n 3}{9\cdot n!}(x-2)^n\ .$$

Табличний ряд буде збігатися при $t\in(-\infty;+\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x\in(-\infty;+\infty)$.

12. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=\ln(x^2-3x+2)$ в околі точки $x_0=4$.

Побудуємо шукане розвинення за допомогою табличних розвинень у ряд Маклорена.Для цього виконаємо заміну змінної $z=x-x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$\ln\left(x^2-3x+2\right)=\left\{\begin{matrix} z=x-4 \\ x=z+4 \end{matrix}\right\}=\ln\left[(z+4)^2-3(z+4)+2\right]=\ln\left(z^2+5z+6\right)=$$

$$=\ln\left[(z+3)\cdot(z+2)\right]=\ln(z+3)+\ln(z+2).$$

$$\ln(z+3)=\ln\left[3\cdot\left(1+\frac{z}{3}\right)\right]=\ln 3+\ln\left(1+\frac{z}{3}\right)=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{z}{3}\right)^n=$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}\cdot z^n \quad ; \quad \left|\frac{z}{3}\right|<1 \quad ; \quad |z|<3.$$

$$\ln(z+2)=\ln\left[2\cdot\left(1+\frac{z}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{z}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n=$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}\cdot z^n \quad ; \quad \left|\frac{z}{2}\right|<1 \quad ; \quad |z|<2.$$

Тоді

$$\ln\left(x^2-3x+2\right)=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}\cdot z^n+\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}\cdot z^n=$$

$$=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)\cdot z^n=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+3^n}{n\cdot 6^n}\cdot z^n=$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+3^n}{n\cdot 6^n}\cdot(x-4)^n.$$

Умовами збіжності допоміжних рядів були нерівності $|z|<2$ та $|z|<3$, тоді отриманий ряд буде збігатися, якщо

$$\begin{cases} |z|<2 \\ |z|<3 \end{cases} \Rightarrow \quad |z|<2 \quad \Leftrightarrow \quad |x-4|<2.$$

Остаточно $\quad y=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+3^n}{n\cdot 6^n}\cdot(x-4)^n \quad , \quad x\in(2;6).$

13. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ в околі точки $x_0=1$.

Побудуємо шукане розвинення за допомогою табличних розвинень у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z=x-x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\begin{Bmatrix} z=x-1 \\ x=z+1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{(z+1)^2-(z+1)-2}=\frac{1}{z^2+z-2}=\frac{1}{(z+2)\cdot(z-1)}=$$

$$=\left\{ \frac{1}{(z+2)\cdot(z-1)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-1} \quad ; \right.$$

$$1=A(z-1)+B(z+2) \quad ;$$

$$z=1: \quad 1=A\cdot 0+B\cdot 3 \quad , \; B=\frac{1}{3} \quad ;$$

$$z=-2: \quad 1=A\cdot(-3)+B\cdot 0 \quad , \; A=-\frac{1}{3} \quad ;$$

$$\left. \frac{1}{(z+2)\cdot(z-1)}=\frac{-\frac{1}{3}}{z+2}+\frac{\frac{1}{3}}{z-1} \right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2+z}\right).$$

Запишемо необхідне для подальшого розв’язування задачі табличне розвинення.

$$(1+t)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\ldots(-1-n+1)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-2)(-4)\ldots(-n)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}{n!}t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \; t^n.$$

Отримуємо

$$\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \; (-z)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n \quad ; \quad |z|<1.$$

$$\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad ;$$

$$\left|\frac{z}{2}\right|<1; \quad |z|<2.$$

$$\frac{1}{x^2-x-2}=-\frac{1}{3}\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\right]=-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^{n+1}}\right)z^n=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}\right)\cdot(x-1)^n \quad ;$$

$$\begin{cases}|z|<2\\|z|<1\end{cases} \Rightarrow \quad |z|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<1.$$

Остаточно $y=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}\right)\cdot(x-1)^n$, $x\in(0;2)$.

14. Записати у вигляді ряду інтеграл зі змінною верхньою границею $\int_0^x x^2\cos x^3 dx$.

Запишемо розвинення у ряд Маклорена підінтегральної функції $f(x)=x^2\cos x^3$.

$$\cos x^3=\{t=x^3\}=\cos t=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x^3)^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!} ,$$

$$f(x)=x^2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}\right) ; \quad f(x)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+2}}{(2n)!} .$$

Отриманий ряд збігається на всій множині дійсних чисел, отже, його можна почленно інтегрувати у будь-якому скінченному проміжку. Тоді з урахуванням того, що $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C$, маємо

$$\int_0^x x^2\cos x^3 dx=\int_0^x\left(x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+2}}{(2n)!}\right)dx=\int_0^x x^2 dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n x^{6n+2}}{(2n)!}dx=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left.\frac{x^{6n+3}}{6n+3}\right|_0^x=\frac{x^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\cdot(2n+1)!}\cdot x^{6n+3} .$$

Легко помітити, що отримане розвинення відповідає функції $y=\frac{1}{3}\sin x^3$, яка є первісною для підінтегральної функції.

15. Записати у вигляді ряду інтеграл зі змінною верхньою границею $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Запишемо розвинення у ряд Маклорена підінтегральної функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{t=x^3\right\}=(1+t)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1-2n}{2}\right)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n}.$$

Як відомо, інтервалом збіжності отриманого ряду є $(-1;1)$, крім того, можна показати за допомогою теореми Лейбніца, що цей ряд збігається також, якщо $x=1$, отже, цей ряд можна почленно інтегрувати, якщо проміжок інтегрування повністю належить множині $(-1;1]$.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n}\right)dx=$$

$$=\int_0^x dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n}\,dx=$$

$$=x\Big|_0^x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\Bigg|_0^x=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(3n+1)}x^{3n+1}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти перші три ненульові члени розвинення у ряд Маклорена функції $y=2^x\cos x$.

2. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 2$ поліном $P(x) = x^4 - x + 3$.

Записати розвинення функції у ряд Маклорена. Вказати інтервал збіжності отриманого ряду.

3. $y = x^7 e^{-4x^2}$. **4.** $y = x^3 \cos\frac{10x^5}{7}$. **5.** $y = x^{10} \sin\frac{2x^3}{5}$.

6. $y = x^8 \ln(1 + 7x^4)$. **7.** $y = \ln(7 - 3x^8)$. **8.** $y = \frac{x^3}{(1 + 3x^4)^2}$.

9. $y = \frac{1}{\sqrt{9 + 7x^3}}$.

Записати розвинення функції у ряд Тейлора в околі заданої точки. Вказати інтервал збіжності отриманого ряду.

10. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x+3}}$, $x_0 = -2$. **11.** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$, $x_0 = -7$.

12. $y = \ln(3 + x)$, $x_0 = 1$. **13.** $y = e^{2x}$, $x_0 = -3$.

14. $y = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$. **15.** $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$, $x_0 = -2$.

16. $y = \ln\frac{5 - x}{3 + x}$, $x_0 = 1$.

Записати у вигляді ряду інтеграл зі змінною верхньою границею .

17. $\int_0^x x^3 e^{-5x^2} dx$. **18.** $\int_0^x \ln(2 - 9x) dx$. **19.** $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{8 + x^5}}$.

Відповіді.

1. $y \approx 1 + \ln 2 \cdot x + \frac{\ln^2 2 - 1}{2} x^2$.

2. $P(x) = 17 + 31(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$.

3. $y = x^7 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!} x^{2n+7}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. $y = x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^{2n}}{7^{2n} (2n)!} x^{5n+3}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{5^{2n-1}(2n-1)!}x^{6n+7}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

6. $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}7^{n}}{n}x^{4n+8}$, $x\in\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{7}};\sqrt[4]{\frac{1}{7}}\right)$.

7. $y=\ln 7-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{7^{n}n}x^{8n}$, $x\in\left(-\sqrt[8]{\frac{7}{3}};\sqrt[8]{\frac{7}{3}}\right)$.

8. $y=x^{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)3^{n}x^{4n+3}$, $x\in\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}};+\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$.

9. $y=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}1\cdot 3\ldots(2n-1)}{3\cdot 9^{n}\cdot 2^{n}n!}x^{3n}$, $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{9}{7}};\sqrt[3]{\frac{9}{7}}\right)$.

10. $y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{4^{n}n!}(x+2)^{n}$, $x\in(-3;-1)$.

11. $y=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2\cdot 24^{n}\cdot n!}(x+7)^{n}$, $x\in(-15;1)$.

12. $y=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n}\cdot n}(x-1)^{n}$, $x\in(-3;5)$.

13. $y=e^{-6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-6}\cdot 2^{n}}{n!}(x+3)^{n}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

14. $y=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 9^{n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

15. $y=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3\cdot 8^{n}\cdot n!}(x+2)^{2n}$, $x\in(-4;0)$.

16. $y=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}+(-1)^{n+1}}{6^{n}\cdot n}(x-1)^{n}$, $x\in(-1;3)$.

17. $I=\frac{1}{4}x^{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 5^{n}}{n!\cdot(2n+4)}x^{2n+4}$.

18. $I=x\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n}}{2^{n}\cdot n(n+1)}x^{n+1}$.

19. $I=\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2\cdot 24^{n}\cdot n!\cdot(5n+1)}x^{5n+1}$.

Розділ 3.
ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ

3.1. Наближене обчислення значень функцій та визначених інтегралів

Для наближеного обчислення значень функцій необхідно побудувати розвинення шуканої функції у степеневий ряд, який є збіжним для відповідного значення аргументу. Далі отриманий числовий ряд наближено замінюється його частинною сумою так, щоб залишковий член ряду не перевищував за абсолютним значенням заданої точності.

Для обчислення визначеного інтегралу будуємо розвинення підінтегральної функції у степеневий ряд та почленно інтегруємо його. Далі отриманий числовий ряд наближено замінюється його частинною сумою так, щоб залишковий член ряду не перевищував за абсолютним значенням заданої точності.

Зразки розв'язування задач

1. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\ln 0{,}85$.

Можна вважати, що шукана величина є значенням функції $y = \ln(1+x)$ при $x = -0{,}15$:

$$\ln 0{,}85 = \ln(1+x)\Big|_{x=-0{,}15}.$$

Запишемо розвинення в ряд Маклорена логарифмічної функції

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \qquad -1 < x < 1.$$

Значення аргументу $x = -0{,}15$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у степеневий ряд:

$$\ln 0{,}85 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-0{,}15)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n \left(\frac{3}{20}\right)^n =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{3^n}{20^n\cdot n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{20^n\cdot n}.$$

2. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\ln 19$.

Спроба представити шукане значення у вигляді $\ln 19=\ln(1+x)\Big|_{x=18}$ є недоцільною, оскільки $x=18$ не належить області збіжності відповідного ряду, отже, використання цього розвинення неможливе.

Запишемо аргумент функції у вигляді дробу

$$19=\frac{1+x}{1-x}\ ;\quad 19(1-x)=1+x\ ;\quad 20x=18\ ;\quad x=0{,}9.$$

Таким чином, можна вважати, що

$$\ln 19=\ln\frac{1+x}{1-x}\Bigg|_{x=0{,}9}.$$

Представимо логарифм дробу у вигляді степеневого ряду:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots\right)-$$

$$-\left(\frac{-x}{1}-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+\frac{(-x)^5}{5}-\frac{(-x)^6}{6}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}\quad,\quad -1<x<1.$$

Тоді $\ln 19=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\cdot 0{,}9^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 9^{2n-1}}{(2n-1)\cdot 10^{2n-1}}.$

3. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\sqrt[4]{1{,}7}$.

Можна вважати, що шукана величина є значенням функції $y=(1+x)^{1/4}$ при $x=0{,}7$:

$$\sqrt[4]{1{,}7}=(1+x)^{1/4}\Big|_{x=0{,}7}.$$

Запишемо розвинення в ряд Маклорена цієї функції.

$$(1+x)^{1/4} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\ldots\left(\frac{5-4n}{4}\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-3)(-7)\ldots(5-4n)}{4^n\cdot n!}x^n \qquad ,-1<x<1.$$

Значення аргументу $x=0{,}7$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у степеневий ряд:

$$\sqrt[4]{1{,}7} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-3)(-7)\ldots(5-4n)}{4^n\cdot n!}\left(\frac{7}{10}\right)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-3)(-7)\ldots(5-4n)}{40^n\cdot n!}\cdot 7^n .$$

Ряд можна записати також у такій формі:

$$\sqrt[4]{1{,}7} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{-1\cdot 3\cdot 7\ldots(4n-5)}{40^n\cdot n!}\cdot 7^n .$$

4. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\sqrt[3]{14}$.

Спроба представити шукане значення у вигляді $\sqrt[3]{14}=(1+x)^{1/3}\Big|_{x=13}$ є недоцільною, оскільки $x=13$ не належить області збіжності біноміального ряду, отже, використання цього розвинення неможливе.

Порівняємо значення аргумента кореня третього степеня з відповідними (третіми) степенями натуральних чисел:

$$1^3=1\ ,\ 2^3=8\ ,\ 3^3=27\ ;\ 8<14<27.$$

Тоді можна представити аргумент кореня у вигляді

$$14=8+6=8\left(1+\frac{3}{4}\right),$$

який надає можливість скористатися табличним розвиненням:

$$\sqrt[3]{14}=\sqrt[3]{8\left(1+\frac{3}{4}\right)}=2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{4}\right)}=2\cdot(1+x)^{1/3}\Big|_{x=3/4}.$$

Запишемо відповідне табличне розвинення

$$(1+x)^{1/3} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\ldots\left(\frac{4-3n}{3}\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-2)(-5)\ldots(4-3n)}{3^n\cdot n!}x^n \qquad ,-1<x<1.$$

Значення аргументу $x=\frac{3}{4}$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у отримане розвинення:

$$\sqrt[3]{14} = 2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-2)(-5)\ldots(4-3n)}{3^n\cdot n!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=$$

$$= 2+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{1(-2)(-5)\ldots(4-3n)}{4^n\cdot n!}.$$

Ряд можна також записати у такій формі:

$$\sqrt[3]{14} = 2+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot(-1)^n\frac{-1\cdot 2\cdot 5\ldots(3n-4)}{4^n\cdot n!}.$$

5. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\frac{1}{\sqrt[3]{20}}$.

Порівняємо значення аргументу кореня третього степеня з відповідними (третіми) степенями натуральних чисел:

$$1^3=1\ ,\ 2^3=8\ ,\ 3^3=27\ \ ;\ \ 8<20<27.$$

Тоді можна представити аргумент кореня у вигляді

$$20=27-7=27\left(1-\frac{7}{27}\right),$$

який надає можливість скористатися табличним розвиненням:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{20}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27\left(1-\frac{7}{27}\right)}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(1-\frac{7}{27}\right)}}=\frac{1}{3}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{3}}\Bigg|_{x=-\frac{7}{27}} .$$

Запишемо відповідне табличне розвинення

$$(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\ldots\left(\frac{2-3n}{3}\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^n \qquad ,-1<x<1.$$

Значення аргументу $x=-\frac{7}{27}$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у отримане розвинення:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{20}} = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}\cdot\left(-\frac{7}{27}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 3^n\cdot n!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{7^n}{27^n}=$$

$$=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 81^n\cdot n!}\cdot 7^n .$$

<u>Зауваження.</u> Спроба записати число **20** у вигляді $20=8+12=8\left(1+\frac{3}{2}\right)$ є недоцільною, оскільки отримане таким чином значення аргументу степеневої функції $x=\frac{3}{2}$ лежить за межами області збіжності відповідного ряду.

6. Обчислити $arctg\,\frac{1}{2}$ з точністю $\varepsilon=0{,}001$.

Представимо шукане значення у вигляді збіжного числового ряду.

$$arctg\,\frac{1}{2}=arctg\,x\Big|_{x=\frac{1}{2}} =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1};$$

$$arctg\,\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 32}-\frac{1}{7\cdot 128}-\frac{1}{9\cdot 512}+\cdots\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}0417+0{,}0063-0{,}0011+0{,}0002-\cdots\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}0417+0{,}0063-0{,}0011=0{,}4635\approx 0{,}464.$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$$\left|R_4\right|<\left|u_5\right|=0{,}0002<0{,}001.$$

7. Обчислити $\cos^2 9°$ з точністю $\varepsilon=0{,}001$.

Представимо шукане значення у вигляді збіжного числового ряду.

$$\cos^2 9°=\frac{1}{2}\left(1+\cos 18°\right)=\frac{1}{2}\left(1+\cos x\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{10}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!\cdot 10^{2n}};$$

$$\cos^2 9°=1-\frac{\pi^2}{2\cdot 10^2\cdot 2!}+\frac{\pi^4}{2\cdot 10^4\cdot 4!}-\frac{\pi^6}{2\cdot 10^6\cdot 6!}+\cdots\approx$$

$$\approx 1-0{,}0247+0{,}0002-\ldots\approx 1-0{,}0247=0{,}9753\approx 0{,}975$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$$\left|R_2\right|<\left|u_3\right|=0{,}0002<0{,}001.$$

<u>Зауваження.</u> При обчисленні значень тригонометричних функцій використовується радіанна міра аргументів.

8. Обчислити $\ln 0{,}9$ з точністю $\varepsilon=0{,}0001$.

Представимо шукане значення у вигляді збіжного числового ряду.

$$\ln 0{,}9=\ln(1+x)\Big|_{x=-0{,}1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-0{,}1)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 10^n}=$$

$$=-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{2\cdot 10^2}+\frac{1}{3\cdot 10^3}+\frac{1}{4\cdot 10^4}+\cdots\right).$$

Цей ряд на відміну від попередніх є знакосталим, тому необхідно застосувати іншу методику оцінки залишкового члена ряду.

Припустимо, що для забезпечення заданої точності треба залишити k членів ряду. Тоді залишковий член ряду відповідає умові

$$\left| R_k \right| = \frac{1}{(k+1)\cdot 10^{k+1}} + \frac{1}{(k+2)\cdot 10^{k+2}} + \frac{1}{(k+3)\cdot 10^{k+3}} + \cdots <$$

$$< \frac{1}{(k+1)\cdot 10^{k+1}} + \frac{1}{(k+1)\cdot 10^{k+2}} + \frac{1}{(k+1)\cdot 10^{k+3}} + \cdots =$$

$$< \frac{1}{(k+1)\cdot 10^{k+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(k+1)\cdot 10^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-0{,}1} =$$

$$= \frac{1}{9(k+1)10^k}.$$

Оберемо $k = 2$. Тоді $\left| R_2 \right| < \frac{1}{9\cdot 3\cdot 10^2} = \frac{1}{2700} \approx 0{,}00037$. Очевидно, що обраної кількості членів ряду недостатньо для досягнення заданої точності.

Візьмемо $k = 3$. В цьому випадку $\left| R_3 \right| < \frac{1}{9\cdot 4\cdot 10^3} = \frac{1}{36000} \approx 0{,}000028$, тобто $\left| R_3 \right| < \varepsilon = 0{,}0001$.

Тоді $\ln 0{,}9 \approx -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2\cdot 10^2} + \frac{1}{3\cdot 10^3}\right) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{3000}\right) \approx$

$$\approx -(0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}00033) = -0{,}10533 \approx -0{,}1053.$$

8. Обчислити $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Запишемо розвинення у ряд Маклорена підінтегральної функції $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

$$e^{-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}; \quad f(x) = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2}.$$

Цей ряд збігається на всій множині дійсних чисел.

Тоді

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2} dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left.\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot(2n+3)}.$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{1!\cdot 5} + \frac{1}{2!\cdot 7} - \frac{1}{3!\cdot 9} + \frac{1}{4!\cdot 11} - \frac{1}{5!\cdot 13} + \cdots \approx$$

$$\approx 0{,}3333 - 0{,}2 + 0{,}0714 - 0{,}0185 + 0{,}0038 - 0{,}0006 + \ldots \approx$$

$$\approx 0{,}3333 - 0{,}2 + 0{,}0714 - 0{,}0185 + 0{,}0038 = 0{,}1900.$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$$\left| R_5 \right| < \left| u_6 \right| = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

9. Обчислити $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ не визначена при $x = 0$, але $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \neq \infty$, отже, функція є інтегровною на проміжку $[\,0\,;0{,}5\,]$. Запишемо розвинення у ряд Маклорена підінтегральної функції .

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1}.$$

Отриманий ряд збігається, якщо $x \in (-1\,;1\,]$, отже його можна почленно інтегрувати на проміжку $[\,0\,;0{,}5\,]$.

Тоді

$$\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{0,5} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{0,5} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{n} \Bigg|_0^{0,5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot 0{,}5^n;$$

$$\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2\cdot 2^2} + \frac{1}{3^2\cdot 2^3} - \frac{1}{4^2\cdot 2^4} + \frac{1}{5^2\cdot 2^5} - \frac{1}{6^2\cdot 2^6} + \cdots \approx$$

$$\approx 0{,}5 - 0{,}0625 + 0{,}0139 + 0{,}0039 + 0{,}0012 - 0{,}0004 + \ldots \approx$$

$$\approx 0{,}5 - 0{,}0625 + 0{,}0139 + 0{,}0039 + 0{,}0012 = 0{,}4487 \approx 0{,}449.$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$$\left| R_5 \right| < \left| u_6 \right| = 0{,}0004 < 0{,}001.$$

Завдання для самостійної роботи

Записати значення функції у вигляді збіжного числового ряду

1. $\sqrt[7]{e}$ **2.** $\sin 10°$ **3.** $\ln 1{,}5$

4. $\ln 0{,}6$ **5.** $\ln 8$ **6.** $\sqrt{1{,}5}$

7. $\sqrt[6]{0{,}8}$ **8.** $\sqrt[3]{70}$ **9.** $\sqrt[5]{30}$

Обчислити значення функції з заданою точністю

10. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $\varepsilon = 0{,}001$. **11.** $\sqrt{68}$, $\varepsilon = 0{,}001$.

12. $\ln 2{,}25$, $\varepsilon = 0{,}01$ (скористатися тим, що $2{,}25 = 1{,}5^{\,2}$).

Обчислити визначений інтеграл з заданою точністю

13. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin x^2 dx$, $\varepsilon = 0{,}001$ **14.** $\int\limits_0^{0{,}25} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\varepsilon = 0{,}00001$.

Відповіді.

1. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n! \cdot 7^{\,n}}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot \pi^{\,2n-1}}{(2n-1)! \cdot 18^{\,2n-1}}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^{\,n}}$ **4.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{\,n}}{n \cdot 5^{\,n}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 7^{\,2n-1}}{(2n-1) \cdot 9^{\,2n-1}}$ **6.** $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1(-1)(-3)\ldots(3-2n)}{4^n \cdot n!}$

7. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1 \cdot 5 \cdot 11 \ldots (6n-7)}{30^n \cdot n!}$ **8.** $4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \dfrac{1(-2)(-5)\ldots(4-3n)}{32^n \cdot n!}$

9. $2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \dfrac{-1 \cdot 4 \cdot 9 \ldots (5n-6)}{80^n \cdot n!}$

10. 0,607 **11.** 8,246 **12.** 0,81 **13.** 0,157 **14.** 0,24951

3.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Для наближеного інтегрування диференціальних рівнянь розв'язок відповідної задачі Коші розшукують у вигляді розвинення в степеневий ряд в околі початкової точки $x = x_0$, тобто будують ряд Тейлора або Маклорена, коефіцієнти якого обчислюють шляхом диференціювання.

Якщо диференціальне рівняння є лінійним, застосовується також метод невизначених коефіцієнтів, який дозволяє побудувати низку рекурентних формул, а іноді навіть знайти правило для обчислення будь-якого коефіцієнта ряду.

Зразки розв'язування задач

1. Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y' = x - y^2 \ , \ y(0) = 0 .$$

Запишемо шукане розвинення у степеневий ряд в околі початкової точки $x_0 = 0$, тобто ряд Маклорена для функції y:

$$y = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Обчислимо за допомогою диференціального рівняння значення декількох похідних шуканої функції.

$$y(0) = 0;$$

$$y'(0) = 0 - 0^2 = 0;$$

$$y'' = 1 - 2y \cdot y',$$

$$y''(0) = 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1;$$

$$y''' = -2(y' \cdot y' + y \cdot y'') = -2(y')^2 - 2y \cdot y'',$$

$$y'''(0) = -2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \ ;$$

$$y^{(4)} = -2 \cdot 2y'y'' - 2(y' \cdot y'' + y \cdot y''') = -6y' \cdot y'' - 2y \cdot y''' \ ,$$

$$y^{(4)}(0) = -6 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \ ;$$

$$y^{(5)} = -6\left(y'' \cdot y'' + y' \cdot y'''\right) - 2\left(y' \cdot y''' + y \cdot y^{(4)}\right) = -6\left(y''\right)^2 - 8y' \cdot y''' - 2y \cdot y^{(4)},$$

$$y^{(5)}(0) = -6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = -6;$$

$$y^{(6)} = -6 \cdot 2y'' \cdot y''' - 8 \cdot \left(y'' \cdot y''' + y' \cdot y^{(4)}\right) - 2 \cdot \left(y' \cdot y^{(4)} + y \cdot y^{(5)}\right) =$$

$$= -20y'' \cdot y''' - 10 \cdot y' \cdot y^{(4)} - 2 \cdot y \cdot y^{(5)},$$

$$y^{(6)}(0) = -20 \cdot 1 \cdot 0 - 10 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-6) = 0;$$

$$y^{(7)} = -20\left(y''' \cdot y''' + y'' \cdot y^{(4)}\right) - 10 \cdot \left(y'' \cdot y^{(4)} + y' \cdot y^{(5)}\right) - 2 \cdot \left(y' \cdot y^{(5)} + y \cdot y^{(6)}\right) =$$

$$= -20 \cdot \left(y'''\right)^2 - 30 \cdot y'' \cdot y^{(4)} - 12 \cdot y' \cdot y^{(5)} - 2 \cdot y \cdot y^{(6)},$$

$$y^{(7)}(0) = -20 \cdot 0^2 - 30 \cdot 1 \cdot 0 - 12 \cdot 0 \cdot (-6) - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$y^{(8)} = -20 \cdot 2 \cdot y''' \cdot y^{(4)} - 30 \cdot \left(y''' \cdot y^{(4)} + y'' \cdot y^{(5)}\right) - 12 \cdot \left(y'' \cdot y^{(5)} + y' \cdot y^{(6)}\right) -$$

$$-12 \cdot \left(y'' \cdot y^{(5)} + y' \cdot y^{(6)}\right) - 2 \cdot \left(y' \cdot y^{(6)} + y \cdot y^{(7)}\right) =$$

$$= -70 \cdot y''' \cdot y^{(4)} - 42 \cdot y'' \cdot y^{(5)} - 14 \cdot y' \cdot y^{(6)} - 2 \cdot y \cdot y^{(7)},$$

$$y^{(8)}(0) = -70 \cdot 0 \cdot 0 - 42 \cdot 1 \cdot (-6) - 14 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 252.$$

Тоді $y = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{-6}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 + \frac{252}{8!}x^8 + \ldots,$

$$y \approx \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{160}x^8.$$

2. Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв’язку задачі Коші

$$y' = x^2 - y^2, \; y(1) = -1.$$

Запишемо шукане розвинення у степеневий ряд в околі початкової точки $x_0 = 1$, тобто ряд Тейлора для функції y:

$$y = y(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n.$$

Обчислимо за допомогою диференціального рівняння значення декількох похідних шуканої функції.

$$y(1) = -1;$$

$$y'(1) = 1^2 - (-1)^2 = 0;$$

$$y'' = 2x - 2y \cdot y',$$

$$y''(1) = 2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 0 = 2;$$

$$y''' = 2 - 2(y'\cdot y' + y\cdot y'') = 2 - 2(y')^2 - 2y\cdot y'',$$

$$y'''(1) = 2 - 2\cdot 0^2 - 2\cdot(-1)\cdot 2 = 6.$$

Тоді $y = -1 + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \ldots,$

$$y \approx -1 + (x-1)^2 + (x-1)^3.$$

3. Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв’язку задачі Коші

$$y'' = xy\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1.$$

Запишемо шукане розвинення у степеневий ряд в околі початкової точки $x_0 = 0$, тобто ряд Маклорена для функції y:

$$y = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Обчислимо за допомогою диференціального рівняння значення декількох похідних шуканої функції.

$$y(0) = 0;$$

$$y'(0) = 1;$$

$$y''(0) = 0\cdot 0 = 0;$$

$$y''' = 1\cdot y + x\cdot y' = 1 + xy';$$

$$y'''(0) = 0 + 0\cdot 1 = 0;$$

$$y^{(4)} = y' + 1\cdot y' + x\cdot y'' = 2y' + xy'';$$

$$y^{(4)}(0) = 2\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2;$$

$$y^{(5)} = 2y'' + 1\cdot y'' + x\cdot y''' = 3y'' + xy''';$$

$$y^{(5)}(0) = 3\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0;$$

$$y^{(6)} = 3y''' + 1\cdot y''' + x\cdot y^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)};$$

$$y^{(6)}(0) = 4\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0;$$

$$y^{(7)} = 4y^{(4)} + 1\cdot y^{(4)} + x\cdot y^{(5)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)};$$

$$y^{(7)}(0)=5\cdot 2+0\cdot 0=10.$$

Тоді $y=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{2}{4!}x^4+\frac{0}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6+\frac{10}{7!}x^7+\ldots,$

$$y\approx x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7.$$

4. Знайти розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y''+y'=e^x\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1.$$

Запишемо шукане розвинення у вигляді ряду з невизначеними коефіцієнтами, знайдемо його похідні та підставимо ці ряди у диференціальне рівняння та початкові умови (права частина рівняння також повинна бути записаною у вигляді ряду).

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots,$$

$$y'=a_1+a_2\cdot 2x+a_3\cdot 3x^2+a_4\cdot 4x^3+a_5\cdot 5x^4+\ldots,$$

$$y''=a_2\cdot 2+a_3\cdot 3\cdot 2x+a_4\cdot 4\cdot 3x^2+a_5\cdot 5\cdot 4x^3+a_6\cdot 6\cdot 5x^4+\ldots\ ,$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\quad .$$

$$y(0)=0\quad\Rightarrow a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\ldots=0\ ;$$

$$y'(0)=1\quad\Rightarrow a_1+a_2\cdot 2\cdot 0+a_3\cdot 3\cdot 0+\ldots=1\ ;$$

$$\left(a_2\cdot 2+a_3\cdot 3\cdot 2x+a_4\cdot 4\cdot 3x^2+a_5\cdot 5\cdot 4x^3+a_6\cdot 6\cdot 5x^4+\ldots\right)+$$

$$+\left(a_1+a_2\cdot 2x+a_3\cdot 3x^2+a_4\cdot 4x^3+a_5\cdot 5x^4+\ldots\right)=$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

$$\left(a_2\cdot 2+a_1\right)+\left(a_3\cdot 3\cdot 2+a_2\cdot 2\right)x+\left(a_4\cdot 4\cdot 3+a_3\cdot 3\right)x^2+$$

$$+\left(a_5\cdot 5\cdot 4+a_4\cdot 4\right)x^3+\left(a_6\cdot 6\cdot 5+a_5\cdot 5\right)x^4+\ldots=$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\quad .$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x та отримаємо рекурентну послідовність рівностей:

$$a_0 = 0 \ ;$$

$$a_1 = 1 \ ;$$

$$a_2 \cdot 2 + a_1 = 1 \ , \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - a_1\right) = 0 \ ;$$

$$a_3 \cdot 3 \cdot 2 + a_2 \cdot 2 = \frac{1}{1!} \ , \qquad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2}\left(\frac{1}{1!} - 2a_2\right) = \frac{1}{3!} \ ;$$

$$a_4 \cdot 4 \cdot 3 + a_3 \cdot 3 = \frac{1}{2!} \ , \qquad a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3}\left(\frac{1}{2!} - 3a_3\right) = \frac{1}{4 \cdot 3}\left(\frac{1}{2!} - \frac{3}{3!}\right) = 0 \ ;$$

$$a_5 \cdot 5 \cdot 4 + a_4 \cdot 4 = \frac{1}{3!} \ , \qquad a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4}\left(\frac{1}{3!} - 4a_4\right) = \frac{1}{5 \cdot 4}\left(\frac{1}{3!} - 0\right) = \frac{1}{5!} \ ;$$

$$a_6 \cdot 6 \cdot 5 + a_5 \cdot 5 = \frac{1}{4!} \ , \qquad a_6 = \frac{1}{6 \cdot 5}\left(\frac{1}{4!} - 5a_5\right) = \frac{1}{6 \cdot 5}\left(\frac{1}{4!} - \frac{5}{5!}\right) = 0 \ ; \quad \ldots$$

Можна довести, що коефіцієнти ряду задаються залежностями

$$a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)!}, \quad a_{2k} = 0.$$

Тоді шуканий ряд має вигляд

$$y = 1 \cdot x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \ldots \quad .$$

Легко помітити, що отриманий розв’язок може бути записаний у вигляді

$y = sh\,x$, де $sh\,x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

5. Знайти розвинення у степеневий ряд розв’язку задачі Коші

$$y'' + y = 1 \ , \ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 0.$$

Запишемо шукане розвинення, знайдемо його похідні та підставимо отримані ряди у диференціальне рівняння та початкові умови.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

$$y' = a_1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + a_4 \cdot 4x^3 + a_5 \cdot 5x^4 + \ldots,$$

$$y'' = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2x + a_4 \cdot 4 \cdot 3x^2 + a_5 \cdot 5 \cdot 4x^3 + a_6 \cdot 6 \cdot 5x^4 + \ldots \quad .$$

$$y(0)=2 \quad \Rightarrow a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\ldots=2\ ;$$

$$y'(0)=0 \quad \Rightarrow a_1+a_2\cdot 2\cdot 0+a_3\cdot 3\cdot 0+\ldots=0\ ;$$

$$\left(a_2\cdot 2+a_3\cdot 3\cdot 2x+a_4\cdot 4\cdot 3x^2+a_5\cdot 5\cdot 4x^3+a_6\cdot 6\cdot 5x^4+\ldots\right)+$$

$$+\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\right)=1,$$

$$\left(a_2\cdot 2+a_0\right)+\left(a_3\cdot 3\cdot 2+a_1\right)x+\left(a_4\cdot 4\cdot 3+a_2\right)x^2+$$

$$+\left(a_5\cdot 5\cdot 4+a_3\right)x^3+\left(a_6\cdot 6\cdot 5+a_4\right)x^4+\ldots=1\ .$$

Отримаємо рекурентну послідовність рівностей

$$a_0=2\ ;$$

$$a_1=0\ ;$$

$$a_2\cdot 2+a_0=1\ , \qquad a_2=\frac{1}{2}\left(1-a_0\right)=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$a_3\cdot 3\cdot 2+a_1=0\ , \qquad a_3=-\frac{1}{3\cdot 2}a_1=0\ ;$$

$$a_4\cdot 4\cdot 3+a_2=0\ , \qquad a_4=-\frac{1}{4\cdot 3}a_2=-\frac{1}{4\cdot 3}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4!}\ ;$$

$$a_5\cdot 5\cdot 4+a_4=0\ , \qquad a_5=-\frac{1}{5\cdot 4}a_3=0\ ;$$

$$a_6\cdot 6\cdot 5+a_4=0\ , \qquad a_6=-\frac{1}{6\cdot 5}a_4=-\frac{1}{6\cdot 5}\cdot\frac{1}{4!}=-\frac{1}{6!}; \quad \ldots$$

Можна довести, що коефіцієнти ряду задаються залежностями

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad a_{2k-1}=0\,.$$

Тоді шуканий ряд має вигляд

$$y=2-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\ldots \quad .$$

Легко помітити, що отриманий розв’язок може бути записаний у вигляді

$$y=1+\cos x\,.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

1. $y' - y\sin x + y = 1$, $y(0) = 1$.
2. $y'' = x\,y' - y + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Знайти розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

3. $y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
4. $y'' - y' = \sin x - \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

Відповіді

1. $y \approx 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.
2. $y \approx x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
3. $y = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots$; $y = e^x - 1$.
4. $y = 2 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \ldots$; $y = 1 + \cos x$.

Розділ 4

РЯДИ ФУР'Є

4.1. Основні формули

Основні формули, за якими будуються розвинення в ряд Фур'є функцій та обчислюються коефіцієнти цих розвинень, наведені у вигляді таблиці.

Період / Парність	$T=2\pi;\ \ x\in(-\pi;\pi)$	$T=2l;\ \ x\in(-l;l)$
Загального вигляду $f(-x)\neq\pm f(x)$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$
Парна $f(-x)=f(x)$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ $a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx$ $a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$
Непарна $f(-x)=-f(x)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ $b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

У процесі обчислення коефіцієнтів Фур'є часто застосовуються деякі відомі математичні формули та факти. Наведемо їх.

Формули перетворення добутків тригонометричних формул в суму

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

Важливі властивості тригонометричних функцій

$\sin 0 = \sin\pi = 0$ $\qquad$ $\sin\pi n = \sin(-\pi n) = 0$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\alpha \pm \pi n) = (-1)^n \sin\alpha$

$\cos 0 = 1 \qquad \cos\pi = -1$ $\qquad$ $\cos\pi n = \cos(-\pi n) = (-1)^n$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha \pm \pi n) = (-1)^n \cos\alpha$

Деякі формули інтегрування

$$\int_a^b \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_a^b \qquad \int_a^b \sin kx\, dx = -\frac{1}{k}\cos kx\Big|_a^b$$

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du$$

4.2.Розвинення в ряди Фур'є 2π-періодичних функцій

Розглянемо деяку 2π-періодичну функцію $f(x)$, неперервну, або таку, що на відрізку $[-\pi;\pi]$ має скінчене число точок розриву першого роду.

Функціональний ряд виду $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,$$

називається рядом Фур'є функції $f(x)$. Цей ряд збігається для будь-якого значення x, у всіх точках неперервності функції сума ряду $S(x) = f(x)$, а в точках розриву сума ряду дорівнює півсумі лівосторонньої та правосторонньої границь функції $f(x)$:

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Якщо 2π-періодична функція $f(x)$ є парною ($f(-x)=f(x)$), то вона розкладається в ряд Фур'є тільки за косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

де $$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

Непарна 2π- періодична функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є тільки за синусами:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

де $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Зразки розв'язування задач

Побудувати ряд Фур'є для заданої функції

1. $y=2-x$, $x\in(-\pi;\pi)$; $y(x+2\pi)=y(x)$.

$$y(-x)=2-(-x)=2+x\neq\pm y(x),$$

тобто це функція загального виду, отже, ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2-x)dx=\frac{1}{\pi}\left(2x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2(\pi+\pi)-\frac{1}{2}\left(\pi^2-(-\pi)^2\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(4\pi-\frac{1}{2}\left(\pi^2-\pi^2\right)\right)=4;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2-x)\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=2-x & du=-dx\\ dv=\cos nx\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((2-x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx(-dx)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left((2-\pi)\underbrace{\sin n\pi}_{0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(2+\pi)\underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\right)+\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n^2}\underbrace{\left(\cos\pi n-\cos(-\pi n)\right)}_{0}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2-x)\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=2-x & du=-dx\\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((2-x)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx(-dx)\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left((2-\pi)\cos\pi n-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(2+\pi)\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos n\pi}\right)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos n\pi(2-\pi-2-\pi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^2}\left(\underbrace{\sin nx}_{0}-\underbrace{\sin(-nx)}_{0}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^n.$$

Таким чином, ряд Фур’є має вигляд

$$y(x)=\frac{4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\sin nx=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\sin nx.$$

2. $y=\cos\frac{3x}{5}$, $x\in(-\pi;\pi)$; $y(x+2\pi)=y(x)$

$$y(-x)=\cos\frac{3\cdot(-x)}{5}=\cos\frac{3x}{5}=y(x),$$

тобто функція є парною, а її ряд Фур'є має вигляд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{3x}{5}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{5}{3}\cdot\sin\frac{3x}{5}\Big|_0^{\pi}=\frac{10}{3\pi}\cdot\left(\sin\frac{3\pi}{5}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)=$$

$$=\frac{10}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{5};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{3x}{5}\cdot\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{3x}{5}+nx\right)+\cos\left(\frac{3x}{5}-nx\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{(3+5n)x}{5}+\cos\frac{(3-5n)x}{5}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{3+5n}\sin\frac{(3+5n)x}{5}\Big|_0^{\pi}+\frac{5}{3-5n}\sin\frac{(3-5n)x}{5}\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{3+5n}\left(\sin\frac{(3+5n)\pi}{5}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{5}{3-5n}\left(\sin\frac{(3-5n)\pi}{5}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{3+5n}\sin\left(\frac{3\pi}{5}+\pi n\right)+\frac{5}{3-5n}\sin\left(\frac{3\pi}{5}-\pi n\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{3+5n}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n+\frac{5}{3-5n}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot 5\cdot\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n\left(\frac{1}{3+5n}+\frac{1}{3-5n}\right)=\frac{5}{\pi}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n\frac{6}{9-25n^2}$$

$$=\frac{30\cdot(-1)^n}{\pi(9-25n^2)}\sin\frac{3\pi}{5}.$$

Отже, $$y(x)=\frac{5}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30\cdot(-1)^n}{\pi\cdot(9-25n^2)}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot\cos nx.$$

3. Функція $y(x)$ задана графічно.

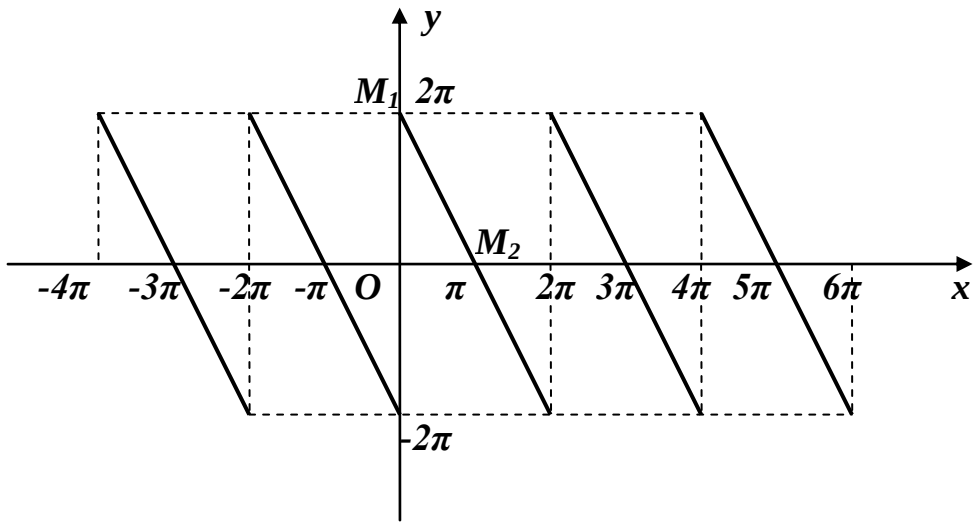

Рис.4.1

Графік даної функції симетричний відносно початку координат, тому функція непарна, періодична с періодом **2π**.

Ряд Фур'є має вигляд

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ де } b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(x)\sin nx dx .$$

Задамо функцію $y(x)$ аналітично. Графік функції – пряма, що сполучає точки $M_1(0;2\pi)$ та $M_2(\pi;0)$.Запишемо рівняння прямої M_1M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \;;\quad \frac{x-0}{\pi-0}=\frac{y-2\pi}{0-2\pi} \;;$$

$$\frac{x}{\pi}=\frac{y-2\pi}{-2\pi} \;;\quad x=\frac{y-2\pi}{-2} \;;\quad y-2\pi=-2x;$$

$$y=2\pi-2x \;;\; x\in(0;\pi) \;.$$

Тоді $b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\pi-2x)\sin nx\, dx=\left\{\begin{matrix} u=2\pi-2x & du=-2dx \\ dv=\sin nx\, dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\}=$

$$=\frac{2}{\pi}\left((2\pi-2x)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx(-2dx)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left((2\pi-2\pi)\cos n\pi-(2\pi-0)\underbrace{\cos 0}_{1}\right)-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{2}{n^2}\left(\underbrace{\sin n\pi}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right)=\frac{4}{n}.$$

Таким чином, ряд Фур'є функції, зображеної на рис.1, виглядає так:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin nx.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти ряд Фур'є для функцій

1. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0<x\le\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$.

2. $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi$, $f(x+2\pi)=f(x)$.

3. На проміжку $[-\pi;\pi]$ функцію задано графічно; $f(x+2\pi)=f(x)$.

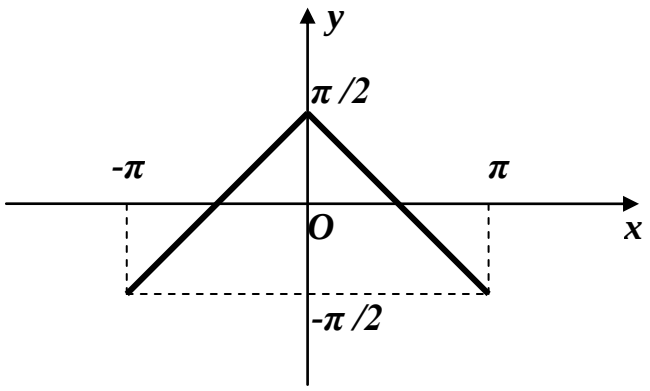

Рис. 4.2

Відповіді

1. $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$.

2. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$.

3. $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx$

4.3. Ряди Фур'є 2*l*- періодичних функцій

Якщо ***f(x)*** є функцією періоду **2*l***, її розвинення в ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Для парних функцій формули мають вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

а для непарних –

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\ ,\ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Зразки розв'язання задач

1. $y=3x-2\pi$, $x\in(-4\pi;4\pi)$; $y(x+8\pi)=y(x)$

Функція є періодичною з періодом $2l=8\pi$, отже, $l=4\pi$.

$y(-x)=3\cdot(-x)-2\pi=-3x-2\pi\neq\pm y(x)$ – функція загального вигляду,

отже, $y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\cancel{\pi}x}{4\cancel{\pi}}+b_n\sin\frac{nx}{4}$.

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}y(x)dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)dx=\frac{1}{4\pi}\left(3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}-2\pi\cdot x\Big|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\left(16\pi^2-16\pi^2\right)-2\pi\cdot\left(4\pi+4\pi\right)\right)=\frac{1}{4\pi}\left(-2\pi\right)\cdot 8\pi=-4\pi\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}y(x)\cos\frac{nx}{4}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}\left(3x-2\pi\right)\cos\frac{nx}{4}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=3x-2\pi & du=3\cdot dx \\ dv=\cos\frac{nx}{4}dx & v=\frac{4}{n}\sin\frac{nx}{4}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\left(3x-2\pi\right)\cdot\frac{4}{n}\sin\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}-\frac{4}{n}\cdot 3\int_{-4\pi}^{4\pi}\sin\frac{nx}{4}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n}\cdot\left(3x-2\pi\right)\sin\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}-\frac{12}{n}\cdot\left(-\frac{4}{n}\right)\cdot\cos\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n}\cdot\left(10\pi\underbrace{\sin\frac{n\cdot 4\pi}{4}}_{0}-\left(-14\pi\right)\underbrace{\sin\frac{n\cdot\left(-4\pi\right)}{4}}_{0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{48}{n^2}\cdot\underbrace{\left(\cos\frac{n\cdot 4\pi}{4}-\cos\frac{n\cdot\left(-4\pi\right)}{4}\right)}_{0}\right)=0\,;$$

$$b_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}y(x)\sin\frac{nx}{4}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}\left(3x-2\pi\right)\sin\frac{nx}{4}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=3x-2\pi & du=3\cdot dx \\ dv=\sin\frac{nx}{4}dx & v=-\frac{4}{n}\cos\frac{nx}{4}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\left(3x-2\pi\right)\cdot\left(-\frac{4}{n}\right)\cos\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}-\left(-\frac{4}{n}\right)\cdot 3\int_{-4\pi}^{4\pi}\cos\frac{nx}{4}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4}{n}\cdot\left(3x-2\pi\right)\cos\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}+\frac{12}{n}\cdot\frac{4}{n}\cdot\sin\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4}{n}\cdot\left(10\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 4\pi}{4}-\left(-14\pi\right)\cos\frac{n\cdot\left(-4\pi\right)}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{48}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{n\cdot 4\pi}{4}}_{0}-\underbrace{\sin\frac{n\cdot\left(-4\pi\right)}{4}}_{0}\right)\right)=$$

$$=-\frac{4}{4\pi n}\cdot\left(10\pi\cdot\cos n\pi+14\pi\cdot\underbrace{\cos\left(-n\pi\right)}_{\cos n\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n}\cdot 24\pi\cos n\pi=\frac{24}{n}\cdot\left(-1\right)^{n+1}.$$

Остаточно $y(x)=\frac{-4\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{nx}{4}$.

2. $y=\begin{cases}2x-1, x\in(-3;0)\\ 3; x\in(0;3)\end{cases}$; $y(x+6)=y(x)$

Функція є періодичною з періодом $2l=6$, отже, $l=3$. Очевидно, що функція є ні парною, ні непарною, отже,

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{3}3\cdot dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0}-x\Big|_{-3}^{0}=0-9-(0+3)=-12,$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3dx=3x\Big|_{0}^{3}=9-0=0,$$

$$a_0=\frac{1}{3}(-12+9)=-1;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\begin{Bmatrix}u=2x-1 & du=2\cdot dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{Bmatrix}=$$

$$=(2x-1)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\frac{3}{n\pi}\cdot 2\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3}{n\pi}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\frac{6}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}-(-7)\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos 0-\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)=$$

$$=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right)=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_0^3 3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3=\frac{9}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\sin 0\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right)+0\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2\cdot dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}-\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot 2\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}+\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\cos 0-(-7)\cdot\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1+7\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}\right)=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_0^3 3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3=-\frac{9}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{9}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{9}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right)+\frac{9}{n\pi}\cdot\left(1-(-1)^n\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\cdot\left(4-10\cdot(-1)^n\right).$$

Таким чином, ряд має вигляд

$$y(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{n\pi}\left(4-10\cdot(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

3. $y=\sin 6x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$; $y\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=y(x)$.

Функція має період $2l = \frac{2\pi}{3}$, отже, $l = \frac{\pi}{3}$.

$y(-x) = \sin 6(-x) = -\sin 6x = -y(x)$ – функція непарна, тобто її ряд Фур'є має вигляд $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi/3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 3nx$.

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$b_n = \frac{2}{\pi/3}\int_0^{\pi/3} y(x)\sin 3nx\,dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}\sin 6x\cdot\sin 3nx\,dx =$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}\left[\cos(6x-3nx)-\cos(6x-3nx)\right]dx =$$

$$= \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\cos(3x(2-n))-\cos(3x(2+n))\right]dx =$$

$$= \frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{3(2-n)}\sin(3x(2-n))\Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{3(2+n)}\sin(3x(2+n))\Big|_0^{\pi/3}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2-n}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}(2-n)\right)-\sin 0\right)-\frac{1}{2+n}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}(2+n)\right)-\sin 0\right)\right] = 0.$$

Отриманий результат справджується для $n \neq 2$, оскільки застосування відомої формули з таблиці інтегралів можливо лише, якщо $n-2 \neq 0$.

Окремо обчислимо коефіцієнт b_2:

$$b_2 = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\underbrace{\cos 0}_{1}-\cos 12x\right]dx = \frac{3}{\pi}\left[x\Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{12}\sin 12x\Big|_0^{\pi/3}\right] =$$

$$= \frac{3}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{3}-0\right)-\frac{1}{12}\left(\sin\frac{12\pi}{3}-\sin 0\right)\right] = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3} = 1.$$

Таким чином, $y = 1\cdot\sin(2\cdot 3x)$, або $y = \sin 6x$.

Отриманий результат є очікуваним, оскільки функція $y(x)$ співпадає з однією з функцій системи, за якою будується розвинення.

4. На проміжку $[-4;4]$ періодичну з періодом $T = 8$ функцію ***y=f(x)*** задано графічно.

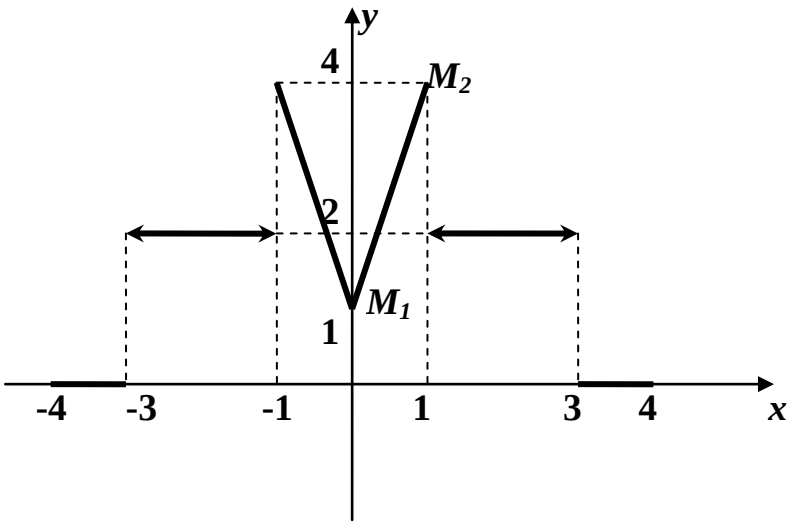

Рис.4.3

Період функції $2l=8$, отже, півперіод $l=4$. Графік є симетричним відносно осі Oy, тому функція парна та розкладається в ряд Фур'є за косинусами:

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}.$$

Задамо функцію аналітично. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(0;1)$ та $M_2(1;4)$.

Користуючись рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, маємо

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{4-1};\qquad x=\frac{y-1}{3};\qquad y-1=3x.$$

Таким чином, $y=3x+1$ для $x\in[0;1]$.

Якщо $x\in(1;3)$, то $y=2$; при $x\in[3;4]$ $y=0$.

Остаточно $y=\begin{cases}3x+1,\ x\in[0;1]\\ 2,\ x\in(1;3)\\ 0,\ x\in[3;4]\end{cases}$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l y(x)dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^1(3x+1)dx+\int_1^3 2dx+\int_3^4 0dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 3xdx+\int_0^1 dx+2x\Big|_1^3\right)=\frac{1}{2}\left(3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1+2\,(3-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(1^2-0^2\right)+\left(1-0\right)+4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2}=\frac{13}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l y(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^1(3x+1)\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\int_1^3 2\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\right.$$

$$\left.+\int_3^4 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right)=\left\{\begin{matrix} u=3x+1 & du=3dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{4}dx & v=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((3x+1)\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\cdot 3\,dx+2\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_1^3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\left((3\cdot 1+1)\cdot\sin\frac{n\pi}{4}-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}\right)-\frac{12}{n\pi}\cdot\left(-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\Big|_0^1+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{n\pi}\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n\pi}\left(4\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+\frac{12}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+2\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6}{n\pi}\right).$$

$$y=\frac{13}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{4}.$$

<u>Зауваження.</u> Також цілком коректною є задача побудови ряду Фур'є для функції, яку задано лише на скінченому проміжку $[-l;\,l]$. Треба лише зауважити, що застосовувати отримане розвинення можна виключно для значень аргументу із зазначеного проміжку.

Завдання для самостійної роботи

Знайти ряд Фур'є для функцій .

1. $f(x)=x, -2<x\le 2,\ f(x+4)=f(x)$.

2. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x<0 \\ x, & 0<x\le 1 \end{cases}, \quad f(x+2)=f(x)$

Відповіді

1. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$.

2. $f(x)=\dfrac{3}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x-\dfrac{1}{\pi n}\sin n\pi x$.

4.4. Ряди Фур'є для функцій, заданих на проміжку $[0;l]$

Якщо функцію $y=f(x)$ задано на проміжку $[0;l]$, то її визначення можна доповнити для проміжку $[-l;0)$, та побудувати розвинення отриманої функції в ряд Фур'є.

У випадку, коли функцію продовжено на проміжку $[-l;0)$ парним образом, отримують розвинення заданої на $[0;l]$ функції за косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad x\in[0;l] ,$$

де $$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Якщо продовження є непарним, отримують розвинення заданої функції за синусами:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\ ,\quad x\in[0;l]\ ,$$

де $\quad b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Аналогічно будується розвинення в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку $[-l;0]$.

Зразки розв'язання задач

1. Побудувати розвинення в ряд Фур'є функції $y=x-\pi$, $x\in[0;2\pi]$

а) за синусами;

б) за косинусами.

а) Функцію задано на проміжку $[0;2\pi]$, отже, $l=2\pi$. Розвинення в ряд Фур'є за синусами має вид

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2\pi}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\sin\frac{nx}{2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin\frac{nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x-\pi & du=dx \\ dv=\sin\dfrac{nx}{2}dx & v=-\dfrac{2}{n}\cos\dfrac{nx}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((x-\pi)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\left(-\frac{2}{n}\right)\int_0^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot(x-\pi)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot\left(\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2}-(-\pi)\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+\frac{4}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cdot(\pi\cdot\cos n\pi+\pi)=-\frac{2}{n}\cdot\left((-1)^n+1\right)=\frac{2}{n}\cdot\left((-1)^{n+1}-1\right).$$

Остаточно $x-\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left((-1)^{n+1}-1\right)}{n}\sin\frac{nx}{2},\ x\in[0;2\pi].$

б) Розвинення функції в ряд Фур'є за косинусами має вид

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi}-\pi\cdot x\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(4\pi^2-4\pi^2\right)-\pi\cdot(2\pi-0)\right)=\frac{1}{\pi}(-\pi)\cdot 2\pi=-2\pi\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos\frac{nx}{2}dx=\left\{\begin{matrix} u=x-\pi & du=dx \\ dv=\cos\frac{nx}{2}dx & v=\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((x-\pi)\cdot\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_{-4\pi}^{4\pi}\sin\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\cdot(x-\pi)\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\cdot\left(\pi\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0}-(-\pi)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{4}{n^2}\left(\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким чином,

$$y=-\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cdot\cos\frac{nx}{2},\ x\in[0;2\pi].$$

2. Побудувати ряди Фур'є за синусами та за косинусами функції, заданої графічно.

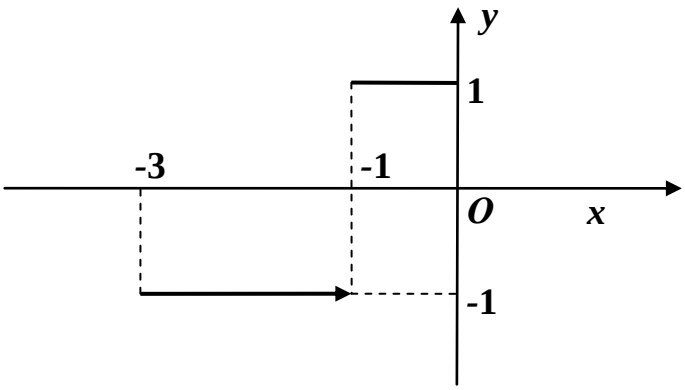

Рис.4.4

Задамо функцію аналітично. Очевидно, що, якщо $x \in [-3;-1)$, то $y=-1$, а для $x \in [-1;0]$ $y=1$, отже,

$$y(x)=\begin{cases} -1, & x \in [-3;-1) \\ 1, & x \in [-1;0] \end{cases}.$$

Функцію задано на проміжку $x \in [-3;0]$, тобто $l=3$.

а) Розвинення в ряд за синусами має вид

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0} y(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-1}^{0}1\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{-1}-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}-\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}-\cos 0+\cos\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{3}-\cos n\pi-1\right)=\frac{2}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n-1\right).$$

Тоді $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n-1\right)\sin\frac{n\pi x}{3}$, $x \in [-3;0]$.

б) Побудуємо ряд за косинусами:

$$y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{3}.$$

$$a_0=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}y(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)dx+\int_{-1}^{0}1dx\right)=\frac{2}{3}\left(-x\Big|_{-3}^{-1}+x\Big|_{-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}(1-3+0+1)=-\frac{2}{3}.$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}y(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-1}^{0}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{-1}+\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left(-\sin\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}+\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}+\underbrace{\sin 0}_{0}-\sin\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Отже,

$$y(x)=-\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3},\quad x\in[-3;0].$$

Завдання для самостійної роботи

Побудувати розвинення в ряди Фур’є за синусами та за косинусами функцій:

1. $y=2x-3,\ x\in[0;2]$.

2. $y=\begin{cases}0, & x\in[-2\pi;-\pi]\\ x, & x\in(-\pi;0]\end{cases}$.

3.

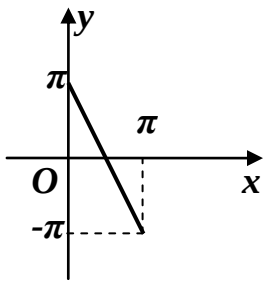

Рис.4.5

Відповіді

1. а) $y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n+3\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$;

   б) $y=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$.

2. а) $y=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{nx}{2}$;

   б) $y=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{\pi n^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos\frac{nx}{2}$.

3. а) $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$;

   б) $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.